Dodatek ke kapitole 20.

Nechť f je spojitá v omezeném, uzavřeném intervalu $[a, b]$. Potom f je zde omezená. — Zobecněním této věty (první semestr) je následující

Věta A. Nechť f je spojitá v intervalu (a, b), ne nutně omezeném. Nechť limity

$$\lim_{x \to a+} f(x)\,, \qquad \lim_{x \to b-} f(x) \tag{1}$$

jsou konečné. Potom f je omezená v (a, b).

Důkaz. Sporem: není-li omezená, pak $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in (a, b)$ tak, že $|f(x_n)| > n$. Tedy

$$|f(x_n)| \to \infty\,, \qquad n \to \infty\,. \tag{2}$$

BÚNO posloupnost $\{x_n\}$ má limitu; jsou tři možnosti:

1. $x_n \to x_0 \in (a, b)$, potom $f(x_n) \to f(x_0) \in \mathbb{R}$ – spor s (2).
2. $x_n \to a$ (zleva), pak je ale (2) ve sporu s konečností limity v (1)
3. $x_n \to b$ (zprava) analogicky

$\square$

Věta B. Nechť f je po částech spojitá funkce. Potom

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2\, dx = 0\,. \tag{3}$$

Důkaz. 1. KROK. Nechť nejprve f je spojitá, po částech C^1. Podle Věty 20.2 je $\mathcal{F}_{f,n}(x) \to f(x)$ pro každé x.
Dle Věty 20.6 splňují Fourierovy koeficienty $|a_k| + |b_k| \le c/k^2$. Podle Weierstrassovy věty konverguje Fourierova řada stejnoměrně, (srovnej důkaz Věty 20.5). Tedy $\mathcal{F}_{f,n}(x) \rightrightarrows f(x)$, odtud $|\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2 \rightrightarrows 0$, a tedy (3) platí (viz Věta 13.2 v minulém semestru.)

2. KROK. Nechť f je libovolná, po částech spojitá. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Vezměme funkci g, která je spojitá, po částech C^1, a přitom

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Funkci g sestrojíme tak, že v intervalech, kde f je spojitá, vedeme g velmi blízko f, skoky v nespojitostech aproximujeme velmi strmou úsečkou. Viz

obrázek na konci. Tím je integrál (4), který odpovídá ploše mezi grafy f a g, tak malý, jak potřebujeme.
Díky nerovnosti $2ab \le a^2 + b^2$ máme

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \le 3(a^2 + b^2 + c^2)\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2\,dx \\
&\le \int_0^{2\pi} \big(|\mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)| + |\mathcal{F}_{g,n}(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\big)^2\,dx \\
&\le 3\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)|^2 + |\mathcal{F}_{g,n}(x) - g(x)|^2 + |g(x) - f(x)|^2\,dx \\
&= 3(I_1 + I_2 + I_3)\,.
\end{aligned}$$

Zde $\mathcal{F}_{g,n}(x)$ značí n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce g.
Díky (4) je $I_3 < \varepsilon$. Podle KROKU 1 je $I_2 < \varepsilon$, pokud n je dost velké.
V důkaze Věty 20.4 jsme mimo jiné dokázali, že

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\,,$$

a tedy

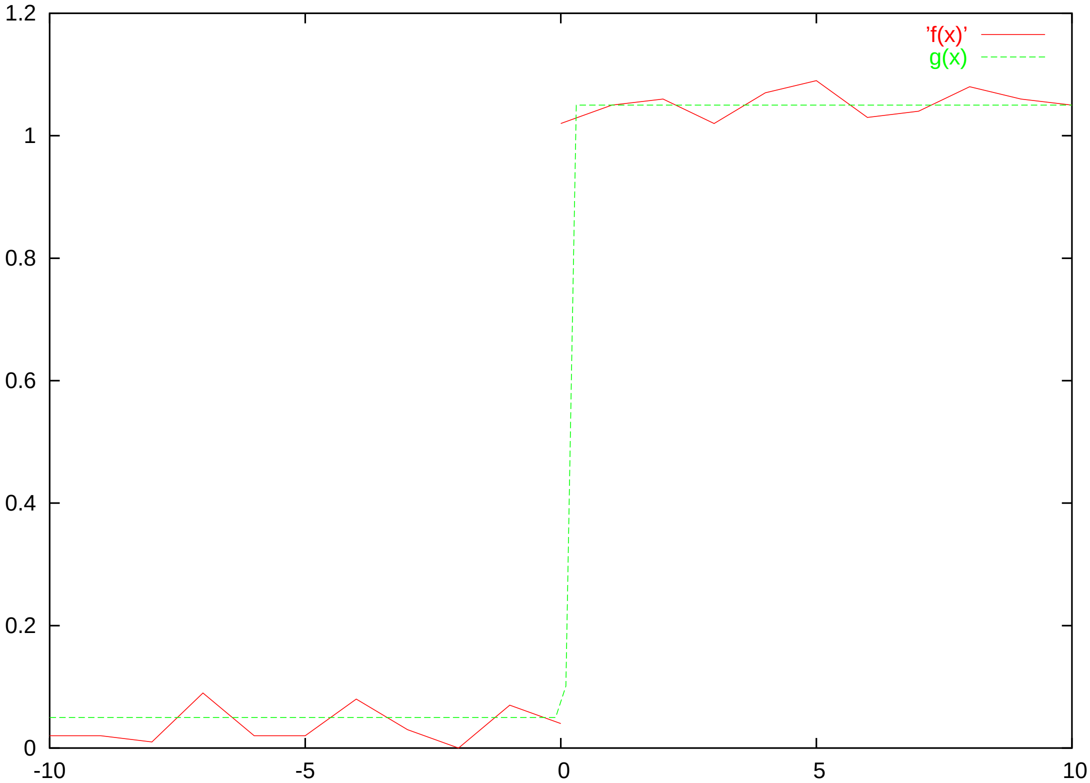
$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)|^2\,dx = \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f-g,n}(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2\,dx\,.$$

Zde $\mathcal{F}_{f-g,n}(x)$ značí n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce $f-g$; použili jsme zřejmou identitu $\mathcal{F}_{f-g,n}(x) = \mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)$.
Tudíž $I_1 < \varepsilon$ díky (4).

Celkem tedy

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2\,dx \le 9\varepsilon\,,$$

pokud n je dost velké. Protože ε lze volit libovolné, důkaz (3) je hotov. $\square$



'f(x)'
g(x)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-10
-5
0
5
10