

20. FOURIEROVY ŘADY.

Definice. Řada funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \quad (T)$$

kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, se nazývá trigonometrická řada.

Poznámka. Pokud tato řada konverguje, je její součet 2π -periodická funkce. Lze naopak každou 2π -periodickou funkci napsat jako součet nějaké trigonometrické řady? – Jedna z hlavních otázek kapitoly.

Lemma 20.1.

- (1) $\int_0^{2\pi} \sin nx = \int_0^{2\pi} \cos nx = 0$ pro $\forall n \neq 0$ celé,
- (2) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx = 0$ pro $\forall m, n \geq 1$ celá,
- (3) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx = \pi \delta_{mn}$, (δ_{mn} je Kroneckerovo delta).

Poznámka. Předchozí lemma říká, že tzv. trigonometrický systém

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$$

je ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$.

Definice. Nechť $f \in L^1(0, 2\pi)$. Trigonometrická řada s koeficienty

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad k \geq 1 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

se nazývá Fourierova řada funkce f . Značí se \mathcal{F}_f . Její n -tý částečný součet značíme

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx].$$

Je tedy $\mathcal{F}_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,n}(x)$. Čísla a_k, b_k se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f .

Poznámky.

- je $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? Jistě ne vždy ve všech bodech, neboť a_k, b_k a tudíž \mathcal{F}_f nevidí změny f na množině míry 0. Viz též poznámku na konci kapitoly.

- \mathcal{F}_f je vždy 2π -periodická, zkoumanou f tedy také rozšíříme 2π -periodicky.
- je-li f funkce 2π -periodická, potom $\int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$
- obecněji, pro f funkci l -periodickou definujeme

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) \right]$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) dx, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{l}kx\right) dx.$$

(Platí příslušné analogie výsledků této kapitoly.)

- f sudá $\implies b_k = 0$; f lichá $\implies a_k = 0$.

Věta 20.1. Nechť řada (T) konverguje stejnoměrně v $[0, 2\pi]$. Označme $s(x)$ její součet. Potom Fourierovy koeficienty funkce $s(x)$ jsou právě čísla a_k, b_k , vyskytující se v (T).

Lemma 20.2. [Komplexní tvar Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1(0, 2\pi)$, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Označme

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom platí vztahy

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad k \geq 1 \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \quad k \geq 1 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Pro n -tý částečný součet Fourierovy řady $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \exp(ikx),$$

a tedy (formálně)

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ikx).$$

Lemma 20.3. [Integrální tvar F.ř.] Nechť $f \in L^1(0, 2\pi)$ je 2π -periodická. Potom n -tý částečný součet F.ř. funkce f splňuje

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz$$

kde

$$D_n(z) = \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) z \right]}{2 \sin \left(\frac{z}{2} \right)}$$

se nazývá Dirichletovo integrační jádro.

Poznámky.

- $D_n(z)$ je sudá, 2π -periodická funkce.
- $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definice. Funkci f nazveme po částech spojitou v (a, b) , pokud existují body $x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ takové, že f je spojitá v intervalech (x_{j-1}, x_j) a navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.

Funkci nazveme po částech C^1 , jestliže navíc $f'(x)$ je spojitá v (x_{j-1}, x_j) a $f'(x)$ má v bodech x_j jednostranné vlastní limity.

Příklady. ① $\operatorname{sgn}(x)$ je po částech C^1 , není spojitá

② $|x|$ je spojitá, je po částech C^1 , není C^1

③ $\sqrt[3]{x}$ je spojitá, není po částech C^1 (derivace je nespojitá v $x = 0$, nemá zde konečné limity.)

Věta 20.2. [O konvergenci Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1(0, 2\pi)$ je 2π -periodická a navíc po částech C^1 v intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom pro $\forall x \in (a, b)$ je

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Speciálně $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ v těch bodech $x \in (a, b)$, kde je $f(x)$ spojitá.

Lemma 20.4.¹ [Riemann-Lebesgueovo.] Nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin(tx) dx = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos(tx) dx = 0.$$

kde $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ je libovolný interval.

¹Důkaz pro po částech spojitě funkce.

Věta 20.3. [Riemannova věta o lokalizaci.] Nechť $f \in L^1(0, 2\pi)$ je 2π -periodická funkce; $A \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (0, \pi)$ jsou pevná čísla. Potom je ekvivalentní:

1. $\mathcal{F}_f(x) = A$

2.

$$\int_0^\delta \{f(x+z) + f(x-z) - 2A\} D_n(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Důsledek. O tom, čemu se rovná $\mathcal{F}_f(x)$, rozhoduje pouze chování f na $(x - \delta, x + \delta)$, kde $\delta > 0$ je pevně zvolené číslo (může být velmi malé.)

Definice. Pro interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $p \in [1, \infty)$ definuji

$$L^p(a, b) = \{f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ je měřitelná, } \int_a^b |f(x)|^p < \infty\}$$

tzv. L^p -integrovatelné funkce.

Poznámky.

- $L^1(a, b) = L(a, b)$... Lebesgueovskiy integrovatelné funkce
- $L^2(a, b)$ je velmi důležitý, neboť v něm lze zavést skalární součin $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$; normu v prostoru L^2 definujeme

$$\|f\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Věta 20.4.² [Parsevalova rovnost.] Nechť $f \in L^2(0, \pi)$ je 2π -periodická, nechť $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ je částečný součet Fourierovy řady, a_k, b_k Fourierovy koeficienty. Potom platí:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2 dx = 0;$$

(2)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Poznámky.

- (1) říká, že $\mathcal{F}_{f,n} \rightarrow f$ v prostoru $L^2(0, \pi)$

²Důkaz ekvivalence (1) a (2), a "≤" v (2). Důkaz pro funkce po částech C^1 viz Dodatek.

- (2) lze chápat jako Pythagorovu větu: (PS) = velikost f (v normě L^2) na druhou, (LS) = součet druhých mocnin souřadnic f (a_k, b_k jako souřadnice vzhledem ke trigonometrickému systému)

Opakování.

Věta A. $f_k(x)$ spojitě, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně $\implies s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je spojitá

Věta B. $|f_k(x)| \leq c_k$ (čísla c_k nezávisí na x), $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konverguje $\implies \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně

Věta C. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, $f_k(x)$ jsou diferencovatelné, $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ konverguje stejnoměrně $\implies s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je diferencovatelná, a $s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$

Věta 20.5. Nechť

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx],$$

a existují $C > 0$, $N \geq 0$ celé tak, že platí

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}}.$$

Potom $f \in C^N$.

Věta 20.6. Nechť $f \in C^N$ je 2π -periodická, nechť navíc $f^{(N+1)}, f^{(N+2)}$ jsou po částech spojitě. Potom pro Fourierovy koeficienty platí

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}}.$$

Důsledek. Vidíme, že hladkost funkce je přímo úměrná tomu, jak rychle Fourierovy koeficienty klesají do nuly.

Z předchozích vět vyplývá, že pro funkce s po částech spojitými derivacemi platí $f \in C^N \setminus C^{N+1} \iff$ Fourierovy koeficienty splňují $|a_k| + |b_k| \sim 1/k^{N+2}$. Pro funkci, která je po částech spojitá, ale není spojitá, platí $|a_k| + |b_k| \sim 1/k$.

Věta 20.7. [Integrovaní Fourierovy řady člen po členu.] Nechť f je po částech spojitá, 2π -periodická, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x f(t) dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right]$$

kde $A_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

Poznámka. Tvrzení dostaneme formálně integrováním rovnosti

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] ,$$

ta ovšem za předpokladů věty nemusí platit!

Důsledek. Nechť $f(x)$ je spojitá, 2π -periodická funkce. Nechť všechny její Fourierovy koeficienty jsou nulové. Potom $f(x)$ je identicky nulová v \mathbb{R} .

Poznámka. Nechť $f(x)$ je 2π -periodická funkce, $\mathcal{F}_f(x)$ její Fourierova řada. Ohledně (ne)nastávání rovnosti

$$\mathcal{F}_f(x) = f(x) \quad (*)$$

je známo toto:

- lze sestrojít $f \in L^1(0, 2\pi)$ takovou, že (*) neplatí pro vůbec žádné x .
- pokud $f \in L^2(0, 2\pi)$, tak (*) platí pro skoro všechna x . Slavný výsledek L. Carlesona z roku 1965; nejkratší známý důkaz nejde pod 30 stran.
- pokud f je spojitá, stále mohou existovat body (dokonce nekonečně bodů) takových, že (*) neplatí.
Ovšem spojitá funkce je omezená, tudíž L^2 -integrovatelná, a tedy díky Carlesonově větě nastává (*) pro skoro všechna x .
- pokud f je spojitá, a f' je po částech spojitá, tak (*) platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Toto jediné tvrzení jsme poctivě dokázali.