A1. Pro která $p > 0$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+k)}{k!k^2} \quad ?$$

A2. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{k+2}{2k-1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} .$$

B1. Pro která $q > 0$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q(q+2)(q+4)\dots(q+2k)}{2^k k! \sqrt{k}} \quad ?$$

B2. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[3k]{2k}}{k \ln k} .$$

A1. řada s kladnými členy, podílové kritérium:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p(p+1)\dots(p+k+1)}{(k+1)!(k+1)^2}\frac{k!k^2}{p(p+1)\dots(p+k)} = \frac{p+k+1}{p+k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \to 1\,,$$

- nedává nic, zkusíme Raabeho:

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right) = k\left(\frac{k+1}{p+k+1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2-1\right) = \frac{\frac{1+\frac{1}{k}}{1+(p+1)\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2-1}{\frac{1}{k}}$$

stačí nahradit $\frac{1}{k}=x$ a počítat $\lim_{x\to 0}$ místo $k\to\infty$

$$\frac{\frac{1+x}{1+(p+1)x}(1+x)^2-1}{x} = \frac{1}{1+(p+1)x}\cdot\frac{(1+x)^3-(1+(1+p)x)}{x}\,.$$

první zlomek jde k 1, druhý pomocí l'Hospitala k $2-p$.

Závěr: konverguje pro $p<1$, diverguje pro $p>1$.

A2. (i) absolutní konvergence:

$$|a_k| = \frac{k+2}{2k-1}\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \sim \frac{1}{k^{1/3}}$$

tedy $\sum|a_k|$ diverguje

(ii) pozoruji, že $\sum(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ má omezené částečné součty, neboť vzorek -1, -1, 1, 1 se opakuje s periodou 4. Dále $1/\sqrt[3]{k}\to$, monotónně. Tedy řada

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

konverguje (Dirichlet).

Posloupnost $b_k=\frac{k+2}{2k-1}$ je omezená (neboť má konečnou limitu), je monotónní: funkce $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$, $f'(x)=-5/(2x-1)^2<0$ pro $x>1/2$, tj. funkce klesá v intervalu $(1/2,\infty)$, potažmo posloupnost b_k klesá.

Resumé: řada (*) konverguje, posloupnost b_k je monotónní, omezená: původní řada konverguje (Abel), podle (i) neabsolutně.

B1. řada s kladnými členy, podílové kritérium:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{q(q+2)\dots(q+2k+2)}{2^{k+1}(k+1)!\sqrt{k+1}}\frac{2^k k!\sqrt{k}}{q(q+2)(q+2k)} = \frac{2k+2+q}{2k+2}\sqrt{\frac{k}{k+1}} \to 1$$

- neříká nic, Raabe:

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=k\left(\frac{2k+2}{2k+2+q}\sqrt{\frac{k+1}{k}}-1\right)=\frac{\frac{2+2\frac{1}{k}}{2+(2+q)\frac{1}{k}}\sqrt{1+\frac{1}{k}}-1}{\frac{1}{k}}$$

píši x místo $\frac{1}{k}$ počítám pro $x\to 0$:

$$\frac{\frac{2+2x}{2+(2+q)x}\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2+(2+q)x}\cdot\frac{(2+2x)\sqrt{1+x}-[2+x(2+q)]}{x}$$

první zlomek jde k $1/2$, druhý pomocí l'Hospitala k $1-q$. Dle Raabeho tedy pro $q>0$ vždy diverguje.

B2. (i) absolutní konvergence:

$$|a_k|=\frac{\sqrt[3k]{2k}}{k\ln k}\sim\frac{1}{k\ln k}$$

Podle integrálního kritéria $\sum 1/k\ln k$ konverguje, právě když je konečný integrál $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$, avšak

$$\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=\big[\ln\ln x\big]_2^\infty=\infty-\ln 2=\infty\,.$$

(ii) řada

$$(**)\qquad\sum(-1)^k\frac{1}{k\ln k}$$

konverguje (Leibniz). Posloupnost

$$b_k=\sqrt[3k]{2k}=\exp(\frac{\ln 2k}{3k})\to 1$$

tedy je omezená. Protože $f(x)=\frac{\ln 2x}{3x}$ klesá (pro dost velká x, zjistím z derivace), je b_k pro dost velká k monotónní.

Resumé: řada (**) konverguje, posloupnost b_k je omezená, monotónní. Tedy původní řada konverguje, díky (i) neabsolutně.