10. Řady.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Symbol (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazývá řada. Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,,$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady (1). Jestliže existuje (konečná nebo nekonečná) limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak číslo s nazveme součtem řady (1). Píšeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \,.$$

Terminologie: pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada konverguje. V opačném případě diverguje. Divergence řady tedy nastane, pokud buď $s_n \to \pm\infty$ (řada diverguje do $\pm\infty$), nebo $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje (řada osciluje).

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
③ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $q \in (-1, 1)$
④ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ osciluje

Věta 10.1.[Nutná podmínka konvergence.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Potom $a_k \to 0$.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ diverguje, pokud $|q| \geq 1$.

Věta 10.2.[Aritmetika řad.] 1. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ konverguje a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

2. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ konverguje a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,.$$

Lemma 10.1. Nechť řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se liší jen v konečně členech. Potom řada (1) konverguje, právě když řada (2) konverguje.

Lemma 10.2. Nechť $a_k \geq 0$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když má omezené částečné součty.

Věta 10.3. [Srovnávací verze 1.] Jsou dány řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde a_k, $b_k \geq 0$. Nechť existuje $c > 0$ takové, že $a_k \leq c\, b_k$ pro $\forall k$. Potom:
(i) pokud řada (2) konverguje, tak řada (1) konverguje;
(ii) pokud řada (1) diverguje, tak řada (2) diverguje.

10.4. [Podílové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^k}$ konverguje.

Poznámka. Pokud $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$, nelze obecně nic říci. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje, pro obě přitom platí $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$.

Věta 10.5. [Odmocninové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\sqrt[k]{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Věta 10.6. [Integrální kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k \geq 0$. Nechť existuje funkce $f(x)$ spojitá, nezáporná a nerostoucí v $[1, \infty)$ taková, že $a_k = f(k)$ pro $\forall k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty$.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje, právě když $a > 1$.

Definice. Řekneme, že a_k je řádově rovno b_k pro $k \to \infty$, jestliže $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ existuje a je konečná a nenulová. Značíme $a_k \sim b_k$.

Věta 10.7. [Srovnávací verze 2.] Nechť a_k, $b_k > 0$, nechť $a_k \sim b_k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ diverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}$ diverguje.
③ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ konverguje.

Věta 10.8. [Raabeho kritérium.] Nechť $a_k > 0$, nechť $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \to p$. Potom:
(i) je-li $p > 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(ii) je-li $p < 1$, řada diverguje.

Poznámky.
• řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Protože $a_{k+1}/a_k = (k/(k+1))^2 \to 1$, podílové kritérium neumí rozhodnout; zato Raabe dává $k(a_k/a_{k+1}-1) \to 2$, tj. řada konverguje. Vidíme, že Raabe je silnější (jemnější) nástroj než podílové kritérium.

• pokud $k(a_k/a_{k+1} - 1) \to 1$, nelze pomocí Raabeho kritéria rozhodnout.

Věta 10.8. [Leibnizovo kritérium.] Nechť $b_k \geq 0$, a $b_k \to 0$. Nechť $b_k \geq b_{k+1}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ konverguje.

Poznámka. S ohledem na Lemma 10.1 by stačilo předpokládat, že $b_k \geq 0$, $b_k \geq b_{k+1}$ platí pro $\forall k \geq n_0$, pro vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$. Časté v aplikacích.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{100+k}$ konverguje.

Poznámky k $\mathbb{C}$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, kde $i^2 = -1$, x, $y \in \mathbb{R}$. Značíme $x = \operatorname{Re} z$ (reálná část), $y = \operatorname{Im} z$ (imaginární část).
Definujeme $\bar{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené), $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$ (absolutní hodnota).
Platí:
(i) $|\operatorname{Re} z|, \operatorname{Im} z \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$
(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$
Konvergence: pro z_n, $z \in \mathbb{C}$ píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.
Ekvivalentně: $z_n \to z$ platí, právě když $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.
Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$ konverguje, pokud s_n (posloupnost částečných součtů) má limitu v $\mathbb{C}$.
Ekvivalentně: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují. Platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k \,.$$

Definice. Řekneme, že posloupnost $b_n \in \mathbb{C}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m, n \geq n_0\big)\big[|b_m - b_n| < \varepsilon\big]\,. \tag{BC}$$

Věta 10.10.* Nechť $b_n \in \mathbb{C}$. Potom je ekvivalentní:
(1) posloupnost $\{b_n\}$ konverguje, tj. $\exists b \in \mathbb{C}$ tak, že $b_n \to b$;
(2) $\{b_n\}$ je cauchyovská.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon\Big]\,. \tag{BC − r}$$

Pozorování. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje (BC-r), právě když s_n (posloupnost částečných součtů) splňuje (BC).

Věta 10.11. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence řady (BC-r).

Lemma 10.3. [Abelovo sumační lemma.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť existuje $K > 0$ takové, že $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $b_k \geq 0$, $b_k \geq b_{k+1}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Potom $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq b_1 K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 10.12. [Dirichletovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) má omezené částečné součty. Nechť $b_k \to 0$ a nechť posloupnost $\{b_k\}$ je monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Lemma 10.4. Nechť $x \neq 2k\pi$. Potom

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Důsledek. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$. Potom řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ mají omezené částečné součty.

Věta 10.13. [Abelovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) konverguje. Nechť posloupnost $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ je omezená a monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Lemma 10.5. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ je monotónní a $c_k \to c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ konverguje.

Poznámka. Předpoklad monotonie (Věty 10.8, 10.12, 10.13 a Lemma 10.5) je podstatný a nelze ho vynechat. Na druhou stranu (viz Lemma 10.1) stačí, aby monotonie platila až od jistého k.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+(-1)^k}$ diverguje.

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{arctg} k$ konverguje.

Věta 10.14. [O absolutní konvergenci.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Potom také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, tak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (která konverguje díky předchozí větě) nazveme absolutně konvergentní. Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, avšak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$, řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$ konverguje absolutně.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje neabsolutně.

Definice. Nechť a_k, $b_k \in \mathbb{C}$. Nechť existuje $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné zobrazení takové, že $a_k = b_{\varphi(k)}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se nazve přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Věta 10.15. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť řada (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Nechť řada (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je libovolné přerovnání řady (1). Potom řada (2) konverguje absolutně a platí $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \le 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a \ge 0 \end{cases}$$

tzv. kladnou resp. zápornou část čísla a.

Poznámka. Platí: $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a $0 \le a^+, a^- \le |a|$.

Věta 10.16. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$ a nechť platí $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$. Nechť $s \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom existuje $\{b_k\}$ přerovnání $\{a_k\}$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$.

Lemma 10.6. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Důsledek. Součet neabsolutně konvergentní řady lze přerovnáním libovolně měnit.

Poznámka. Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Je správná úvaha "nejdříve sečtu všechny kladné členy, pak všechny záporné, pak to složím a mám výsledek"? Formálně jde o rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- .$$

Pro absolutně konvergentní řady to platí. V případě neabsolutně konvergentní řady ne: napravo totiž je $\infty - \infty$.

Věta 10.17. [Cauchyův součin řad.] Nechť řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a (2) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergují absolutně. Pro $k = 0, 1, \dots$ označme $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

a řada $\sum c_k$ konverguje absolutně.

Příklad. Označ $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Potom $E(z) \cdot E(w) = E(z + w)$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$.