10. Řady.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Symbol (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazývá řada. Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n ,$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady (1). Jestliže existuje (konečná nebo nekonečná) limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak číslo s nazveme součtem řady (1). Píšeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s .$$

Terminologie: pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada konverguje. V opačném případě diverguje. Divergence řady tedy nastane, pokud buď $s_n \to \pm\infty$ (řada diverguje do $\pm\infty$), nebo $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje (řada osciluje).

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
③ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $q \in (-1, 1)$
④ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ osciluje

Věta 10.1.[Nutná podmínka konvergence.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Potom $a_k \to 0$.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ diverguje, pokud $|q| \geq 1$.

Věta 10.2.[Aritmetika řad.] 1. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ konverguje a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

2. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují. Potom $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ konverguje a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Lemma 10.1. Nechť řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se liší jen v konečně členech. Potom řada (1) konverguje, právě když řada (2) konverguje.

Lemma 10.2. Nechť $a_k \geq 0$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když má omezené částečné součty.

Věta 10.3. [Srovnávací verze 1.] Jsou dány řady (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde a_k, $b_k \geq 0$. Nechť existuje $c > 0$ takové, že $a_k \leq c\, b_k$ pro $\forall k$. Potom:
(i) pokud řada (2) konverguje, tak řada (1) konverguje;
(ii) pokud řada (1) diverguje, tak řada (2) diverguje.

10.4. [Podílové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^k}$ konverguje.

Poznámka. Pokud $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$, nelze obecně nic říci. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje, pro obě přitom platí $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$.

Věta 10.5. [Odmocninové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\sqrt[k]{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Věta 10.6. [Integrální kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k \geq 0$. Nechť existuje funkce $f(x)$ spojitá, nezáporná a nerostoucí v $[1, \infty)$ taková, že $a_k = f(k)$ pro $\forall k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty$.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje, právě když $a > 1$.

Definice. Řekneme, že a_k je řádově rovno b_k pro $k \to \infty$, jestliže $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ existuje a je konečná a nenulová. Značíme $a_k \sim b_k$.

Věta 10.7. [Srovnávací verze 2.] Nechť a_k, $b_k > 0$, nechť $a_k \sim b_k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ diverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}$ diverguje.
③ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ konverguje.

Věta 10.8. [Raabeho kritérium.] Nechť $a_k > 0$, nechť $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \to p$. Potom:
(i) je-li $p > 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(ii) je-li $p < 1$, řada diverguje.

Poznámky.

• řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Protože $a_{k+1}/a_k = (k/(k+1))^2 \to 1$, podílové kritérium neumí rozhodnout; zato Raabe dává $k(a_k/a_{k+1}-1) \to 2$, tj. řada konverguje. Vidíme, že Raabe je silnější (jemnější) nástroj než podílové kritérium.

• pokud $k(a_k/a_{k+1}-1) \to 1$, nelze pomocí Raabeho kritéria rozhodnout.

Věta 10.8. [Leibnizovo kritérium.] Nechť $b_k \geq 0$, a $b_k \to 0$. Nechť $b_k \geq b_{k+1}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ konverguje.

Poznámka. S ohledem na Lemma 10.1 by stačilo předpokládat, že $b_k \geq 0$, $b_k \geq b_{k+1}$ platí pro $\forall k \geq n_0$, pro vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$. Časté v aplikacích.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{k}}{100+k}$ konverguje.

Poznámky k $\mathbb{C}$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, kde $i^2 = -1$, x, $y \in \mathbb{R}$. Značíme $x = \operatorname{Re} z$ (reálná část), $y = \operatorname{Im} z$ (imaginární část).
Definujeme $\bar{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené), $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$ (absolutní hodnota).
Platí:
(i) $|\operatorname{Re} z|, \operatorname{Im} z \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$
(ii) $|z+w| \leq |z| + |w|$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$
Konvergence: pro z_n, $z \in \mathbb{C}$ píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.
Ekvivalentně: $z_n \to z$ platí, právě když $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.
Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$ konverguje, pokud s_n (posloupnost částečných součtů) má limitu v $\mathbb{C}$.
Ekvivalentně: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují. Platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k \,.$$

Definice. Řekneme, že posloupnost $b_n \in \mathbb{C}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m, n \geq n_0\big)\big[|b_m - b_n| < \varepsilon\big] \,. \tag{BC}$$

Věta 10.10.* Nechť $b_n \in \mathbb{C}$. Potom je ekvivalentní:
(1) posloupnost $\{b_n\}$ konverguje, tj. $\exists b \in \mathbb{C}$ tak, že $b_n \to b$;
(2) $\{b_n\}$ je cauchyovská.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady (BC-r), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon\Big].$$

Pozorování. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje (BC-r), právě když s_n (posloupnost částečných součtů) splňuje (BC).

Věta 10.11. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence řady (BC-r).

Lemma 10.3. [Abelovo sumační lemma.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť existuje $K > 0$ takové, že $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $b_k \geq 0$, $b_k \geq b_{k+1}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Potom $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq b_1 K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 10.12. [Dirichletovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{C})$ má omezené částečné součty. Nechť $b_k \to 0$ a nechť posloupnost $\{b_k\}$ je monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Lemma 10.4. Nechť $x \neq 2k\pi$. Potom

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Důsledek. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$. Potom řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ mají omezené částečné součty.

Věta 10.13. [Abelovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{C})$ konverguje. Nechť posloupnost $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ je omezená a monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Lemma 10.5. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ je monotónní a $c_k \to c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ konverguje.

Poznámka. Předpoklad monotonie (Věty 10.8, 10.12, 10.13 a Lemma 10.5) je podstatný a nelze ho vynechat. Na druhou stranu (viz Lemma 10.1) stačí, aby monotonie platila až od jistého k.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+(-1)^k}$ diverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{arctg} k$ konverguje.

Věta 10.14. [O absolutní konvergenci.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Potom také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, tak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (která konverguje díky předchozí větě) nazveme absolutně konvergentní. Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, avšak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$, řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$ konverguje absolutně.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje neabsolutně.

Definice. Nechť $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Nechť existuje $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné zobrazení takové, že $a_k = b_{\varphi(k)}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se nazve přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Věta 10.15. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť řada (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Nechť řada (2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je libovolné přerovnání řady (1). Potom řada (2) konverguje absolutně a platí $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a \geq 0 \end{cases}$$

tzv. kladnou resp. zápornou část čísla a.

Poznámka. Platí: $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a $0 \leq a^+, a^- \leq |a|$.

Věta 10.16. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$ a nechť platí $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$. Nechť $s \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom existuje $\{b_k\}$ přerovnání $\{a_k\}$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$.

Lemma 10.6. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Důsledek. Součet neabsolutně konvergentní řady lze přerovnáním libovolně měnit.

Poznámka. Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Je správná úvaha "nejdříve sečtu všechny kladné členy, pak všechny záporné, pak to složím a mám výsledek"?

Formálně jde o rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- .$$

Pro absolutně konvergentní řady to platí. V případě neabsolutně konvergentní řady ne: napravo totiž je $\infty - \infty$.

Věta 10.17. [Cauchyův součin řad.] Nechť řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a (2) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergují absolutně. Pro $k = 0, 1, \ldots$ označme $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

a řada $\sum c_k$ konverguje absolutně.

Příklad. Označ $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Potom $E(z) \cdot E(w) = E(z+w)$ pro $\forall z$, $w \in \mathbb{C}$.

11. Mocninné řady.

Definice. Mocninnou řadou rozumíme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad (1) .$$

kde z_0 je střed řady, c_k jsou koeficienty řady; řadu chápeme jako funkci proměnné z. Předpokládáme c_k, z_0, $z \in \mathbb{C}$. Platí úmluva $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$, tj. řada vypadá $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$.

Poznámky.
- mocninná řada … zobecněný polynom
- mnoho funkcí se dá napsat jako součet mocninné řady, např. $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$ pro $|z| < 1$.

Věta 11.1. [Poloměr konvergence.] Je dána mocninná řada (1). Potom existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že
(i) pokud $|z - z_0| < R$, tak (1) konverguje absolutně;
(ii) pokud $|z - z_0| > R$, tak (1) diverguje.

Terminologie. Číslo R z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence řady. Množina $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = R\}$ se nazývá kruh resp. kružnice konvergence. Zjevně může existovat jen jedno číslo R, které splní obě vlastnosti (i), (ii) - tj. poloměr konvergence je určen jednoznačně.

Věta 11.2. Je dána řada (1). Nechť $c_k \neq 0$ a nechť $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Příklady. ① $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ … $R = 1$, na kružnici konvergence řada diverguje
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ … $R = 1$, na kružnici konvergence řada konverguje absolutně

Věta 11.3. Je dána řada (1). Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Poznámka. Hlavním cílem kapitoly je dokázat rovnost:

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}\,.$$

Formálně jde o "derivování řady člen po členu", neboli o záměnu $\sum$ a $'$.
Řada vpravo je také mocninná řada - můžeme ji přepsat jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z - z_0)^k\,, \qquad \tilde{c}_k = (k+1) c_{k+1}\,.$$

Lemma 11.1. Řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důsledek. Také řady (3) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k (z - z_0)^{k-2}$, (4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako (1).
Heslo: formálním derivováním/integrováním člen po členu se nemění poloměr konvergence.

Věta 11.4. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$. Označme

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\,, \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}\,.$$

Potom $F'(z) = f(z)$ pro $\forall z \in U$, kde $U = \big\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\big\}$.

Poznámky.
• funkce $F(z)$, $f(z)$ jsou pro $z \in U$ korektně definovány, nebo dané řady konvergují absolutně (Lemma 11.1.)
• tvrzení platí ve smyslu derivace podle komplexní proměnné, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[0 < |h| < \delta,\ h \in \mathbb{C} \implies \left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon\Big],$$

kde $z \in U$ je libovolné.
• speciální případ je i derivace podle reálné proměnné, tj. $F'(x) = f(x)$, pro každé x z intervalu $(-R, R)$, neboli

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[0 \neq h \in (\delta, \delta) \implies \left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon\Big].$$

Důsledky. (Věty 11.4.)
• funkce $F(z)$ je v množině U nekonečně diferencovatelná a platí $F''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, $F^{(3)}(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k(z-z_0)^{k-3}$ atd.

• funkce $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ je primitivní funkce k $F(z)$ v množině U, tj. $\Phi'(z) = F(z)$ pro $\forall z \in U$.

Příklad. $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Potom $E'(z) = E(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

Věta 11.5. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$ její součet. Potom $F^{(k)}(z_0) = k!\, c_k$ pro $\forall l = 0, 1, \ldots$.

Důsledek. Nechť řada (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence, a $F(z)$ je její součet. Potom n-tý Taylorův polynom funkce $F(z)$ o středu z_0 je roven n-tému částečnému součtu řady (1).

Věta 11.6. Nechť řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z-z_0)^k$ mají kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$, $\tilde{F}(z)$ jejich součty. Nechť $F(z) = \tilde{F}(z)$ na jistém $U(z_0)$. Potom $c_k = \tilde{c}_k$ pro $\forall k = 0, 1, \ldots$.

Důsledek. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = 0$ pro $\forall z$ z nějakého $U(z_0)$. Potom $c_k = 0$ pro $\forall k = 0, 1, \ldots$.

Poznámka. Srovnej s příbuznou větou: nechť p, $\tilde{p}$ jsou polynomy, nechť $p(x) = \tilde{p}(x)$ pro nekonečně x. Potom p, $\tilde{p}$ jsou identické, tj. mají stejné koeficienty.

Věta E. Existuje funkce $\exp x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, splňující:

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp x$ je rostoucí a spojitá v $\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Funkce $\exp x$ je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Poznámka. V důkaze předchozí věty se ukáže, že

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,;$$

podobně platí

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Lemma 11.3. Pro $\forall x,\ y \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} \exp(x+iy) &= \exp(x)\big[\cos y + i \sin y\big]\,, \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\big[\exp(ix) - \exp(-ix)\big] = \frac{1}{i}\sinh(ix)\,, \\ \cos x &= \frac{1}{2}\big[\exp(ix) - \exp(-ix)\big] = \cosh(ix)\,. \end{aligned}$$

Definice. Funkce $F(z)$ se nazve analytická v bodě z_0, jestliže existují $c_k \in \mathbb{C}$ tak, že $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ na jistém $U(z_0)$.
Funkce se nazve analytická v množině Ω, je-li analytická v každém bodě Ω.

Příklad. Funkce $\exp(z)$ je analytická v $\mathbb{C}$, neboť pro každé $z_0 \in \mathbb{C}$ platí $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{k!}(z-z_0)^k$.

12. Diferenciální rovnice.

Úmluva. V celé kapitole jsou I, J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ je reálná funkce $(n+2)$ proměnných, která není konstantní vůči z_n. Potom výraz

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n pro neznámou funkci y proměnné x.

Řešením rovnice (1) rozumíme funkci $y(x) : I \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivace až do řádu n všude v I, a

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

pro každé $x \in I$.

Definice. Nechť $y : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ jsou dvě řešení, přičemž interval $\tilde{I}$ je striktně větší než I, a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.
Potom $\tilde{y}$ se nazve prodloužením y, a naopak y se nazve restrikcí $\tilde{y}$.

Příklad. Funkce $y_1(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$, $y_2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ a

$$y_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

jsou všechny řešení rovnice $y' = 2\sqrt{y}$. Vidíme, že y_2, y_3 jsou dvě různá prodloužení řešení y_1. V bodě $x = 0$ nastává větvení (nejednoznačnost).

Definice. Obyčejnou diferenciální rovicí 1. řádu rozumíme výraz

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{2}$$

kde $F = F(x, y, z)$ je nekonstatní vůči z. Řešením rovnice (2) je funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}$, přičemž $y'(x)$ existuje vlastní všude v I a $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ pro $\forall x \in I$.

Poznámka. Připomeňme z minulého semestru:
<u>Věta.</u> Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak existuje $F(x) : I \to \mathbb{R}$ primitivní funkce (zkratka p.f.) k $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$. Značíme též $F(x) = \int f(x)\,dx$.
<u>Věta.</u> Nechť $F(x)$, $G(x)$ mají vlastní derivace v intervalu I. Potom je ekvivalentní

(i) $F'(x) = G'(x)$ pro $\forall x \in I$
(ii) $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro $\forall x \in I$

Definice. Lineární ODR 1. řádu rozumíme

$$y' + a(x)y = b(x)\,. \tag{3}$$

Věta 12.1. [Řešení lineární ODR 1. řádu.] Je dána rovnice (3). Nechť $a(x)$, $b(x)$ jsou spojité v I, nechť $A(x) = \int a(x)\,dx$, $B(x) = \int b(x) \exp A(x)\,dx$ v I. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom

$$y(x) = \exp(-A(x))\big[B(x) + c\big]$$

je řešení rovnice (3) v I. Naopak: všechna řešení rovnice (3) mají tento tvar.

Poznámka. Výraz $\exp A(x)$ se nazývá integrační faktor.

Příklad. rovnice: $y' + y\cos x = \exp(-\sin x)$, i.f.: $\exp\sin x$, obecné řešení: $y(x) = [x+c]\exp(-\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Rovnice

$$y' = g(y)f(x) \tag{4}$$

se nazývá rovnice se separovanými proměnnými.

Věta 12.2. [Řešení rce se sep. prom.] Je dána rovnice (4). Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová v J. Nechť $F(x)$ resp. $G(y)$ jsou p.f. k $f(x)$ resp. $1/g(y)$ v I resp. v J.
Označ $G_{-1}(z)$ funkci inverzní ke $G(y)$. Nechť $\tilde{I} \subset I$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou zvoleny tak, že $F(x) + c$ leží v definičním oboru $G_{-1}(z)$ (tj. v $G(J)$) pro $\forall x \in \tilde{I}$.
Potom funkce

$$y(x) = G_{-1}(F(x) + c)\,, \quad x \in \tilde{I}$$

je řešení rovnice (4).

Poznámka. Předpoklad "F(x)+c leží oboru hodnot G" je potřeba hlídat – formální výpočet totiž může vést k řešení, které řešením není.

Příklad. Rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$. Aplikací předchozí věty nacházíme dva typy řešení:
1. typ: $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$, $G(y) = -\sqrt{-y}$, $F(x) = x$. Tedy $G(J) = (-\infty, 0)$, $\tilde{I} = (-\infty, -c)$. nalezené řešení $y(x) = -(x+c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$.
Pozor: pro $x > -c$ daná funkce NENÍ řešení rovnice.
2. typ: podobně - $J = (0, \infty)$, $G(y) = \sqrt{y}$, $G(J) = (0, \infty)$. Nalezené řešení $y(x) = (x+c)^2$, $x \in (-c, \infty)$. (Opět není řešení pro $x < -c$).
3. typ: zjevně $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení.

Poznámka. V dalším se zaměříme na rovnici tvaru

$$y' = f(x, y)\,, \tag{5}$$

- tzv. rovnice vyřešená vzhledem k derivaci - která je z hlediska teorie "šikovnější" než obecný tvar (2).

Lemma 12.1. [O napojování.] Nechť $y_1(x) : (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice (5) $y' = f(x, y)$. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim\limits_{x\to x_0+} y_2(x)$.

Nechť $f(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0) \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

je řešením rovnice (5) v celém (a, b).

Příklad. Funkce

$$y(x) = \begin{cases} -(x+c)^2, & x < -c \\ 0, \ x \geq -c \end{cases}$$

(tj. napojení řešení typu 1 a 3) je řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$.
Lemma 12.1 řeší vlastně jedinou věc: že rovnice je splněna v bodě napojení (jinde je to jasné) a říká, že to je zaručeno, napojím-li spojitě. Srovnej s Lemmatem 6.3 v minulém semestru.

Poznámka. Obecný postup řešení rovnice se separovnými proměnnými (4):

- pokud $y_0 \in \mathbb{R}$ je takové, že $g(y_0) = 0$, pak $y(x) = y_0$ je tzv. singulární (stacionární) řešení. Platí na každém intervalu, na němž je definována $f(x)$.
- pomocí Věty 12.2 hledám řešení $y(x) : I \to J$, kde $f(x)$ je spojitá I, $g(y)$ je spojitá, nenulová v J.
- pomocí Lemmatu 12.1 nalezená řešení napojuji.

Definice. Řekneme, že řešení $y(x)$ rovnice (5) prochází bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, jestliže (i) definiční obor $y(x)$ obsahuje bod x_0 a (ii) $y(x_0) = y_0$.
V bodě (x_0, y_0) nastává větvení, jestliže exitují dvě řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$, která tímto bodem procházejí, avšak která se neshodují na žádném okolí x_0. Tj. $\forall \delta > 0 \ \exists \tilde{x} \in U(x_0, \delta)$ tak, že $y_1(\tilde{x}) \neq y_2(\tilde{x})$.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ nastává v bodě $(0, 0)$ větvení: $y_1(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $y_2(x) = x^2$ pro $x > 0$ a $= 0$ pro $x \leq 0$.

Poznámka. Jestliže $y(x)$ řešení rovnice (5) prochází bodem (x_0, y_0), pak nutně $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$. Důsledek: pokud stejným bodem prochází více řešení, mají zde stejnou tečnu - jejich grafy se "dotýkají", nemohou se "křížit".

* **Věta 12.3.** Nechť $f(x,y)$ je spojitá na okolí bodu (x_0, y_0). Potom bodem (x_0, y_0) prochází alespoň jedno řešení rovnice (5).
Podrobně: existuje $\delta > 0$ a funkce $y(x) : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, která řeší (5) a splňuje $y(x_0) = y_0$.

* **Věta 12.4.** Nechť funkce $f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ jsou spojité na okolí bodu (x_0, y_0). Potom bodem (x_0, y_0) prochází řešení (5), které je lokálně jednoznačné.
Podrobně: existuje $y(x)$ řešení (5) procházející (x_0, y_0), a je-li $\tilde{y}(x)$ jiné řešení, procházející (x_0, y_0), tak existuje $\delta > 0$ tak, že $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in U(x_0, \delta)$.
Jinak řečeno: v bodě (x_0, y_0) nenastává větvení.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ zaručují výše uvedené věty, že (i) každým bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ prochází alespoň jedno řešení a (ii) větvení může nastat jen v bodech $(x_0, 0)$.

Definice. Řešení $y(x) : I \to \mathbb{R}$ dané ODR se nazve maximální, jestliže ho nelze prodloužit, tj. neexistuje $\tilde{y}(x) : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ takové řešení, že $I \subset \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.

Definice. Náš cíl: najít všechna maximální řešení.
Řešení $y(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ rovnice (5) určitě nejde prodloužit za bod $x = b$, jestliže (i) $b = +\infty$ nebo (ii) $y(x) \to \infty$ pro $x \to b-$ a nebo (iii) $y(x) \to y_0$ pro $x \to b-$, avšak bod (b, y_0) neleží v definičním oboru funkce $f(x,y)$.
Jak poznám, že mám všechna řešení? Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a funkce $f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ jsou spojité v Ω. Jestliže najdu nějaká řešení $\{y_c(x)\}_{c \in \mathbb{R}}$ taková, že jejich grafy vyplní celou Ω, pak díky Větě 12.4. jsou to zároveň všechna řešení, která se v Ω mohou vyskytnout.

Definice. Rovnice $y' = f(x,y)$ se nazve homogenní, jestliže funkce $f(x,y)$ splňuje $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ pro $\forall \lambda \neq 0$.
Postup řešení: položíme $y(x) = xz(x)$ – rovnice přejde na rovnici se separovnými proměnnými (pro novou neznámou funkci $z(x)$.) Pozor na bod $x = 0$.

Příklad. $x^2 y' + xy = 2y^2$.

Definice. Rovnice $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$, kde $\alpha \neq 0$, 1, se nazývá Bernoulliho rovnice.
Postup řešení: substitucí $z(x) = \big[y(x)\big]^{1-\alpha}$ převedeme na lineární rovnici (pro novou neznámou funkci $z = z(x)$).

Příklad. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$, tj. $\alpha = 1/2$, $z = \sqrt{y}$ vede na $z' - 2z/x = x/2$.

Definice. Systémem n ODR prvního řádu rozumíme

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y})\,, \tag{6}$$

tj. rovnice $y_i'(x) = F_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $i = 1, \ldots, n$, kde $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ jsou neznámé funkce, a $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou dány. Přirozená počáteční podmínka je

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{\eta}\,, \tag{7}$$

neboli $y_i(x_0) = \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$, kde $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou předepsány.

Poznámka. Platí věta analogická V.12.4: pokud $\boldsymbol{F}$ má rozumné vlastnosti, pak pro libovolně zvolenou počáteční podmínku (7) existuje (jediné) řešení (6), definované na jistém okolí bodu x_0.

Definice. Rovnicí n-tého řádu, vyřešenou vůči nejvyšší derivaci, rozumíme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,. \tag{8}$$

Věta 12.5. Funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice (8), právě když funkce $\boldsymbol{z}(x) : I \to \mathbb{R}^n$, kde

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

řeší systém

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_1, \ldots, z_n)\,. \end{aligned}$$

Počáteční podmínka $\boldsymbol{z}(x_0) = \boldsymbol{\eta}$ odpovídá počáteční podmínce pro y tvaru $y(x_0) = \eta_1$, $y'(x_0) = \eta_2$, $\ldots y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$.

Poznámka. Přirozená počáteční podmínka (tj. taková, pro níž existuje právě jedno řešení) pro rovnici 1. řádu je určená hodnotou řešení v jednom bodě. Pro rovnici n-tého řádu je přirozená počáteční podmínka předepsat hodnotu a první až (n-1)-tou derivaci v jednom bodě.

Definice. Lineární diferenciální rovnicí řádu n rozumíme

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)\,. \tag{9}$$

Terminologie: $a_i(x)$ … koeficienty rovnice, $f(x)$ … pravá strana.
Značení $C(I)$ … funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, které jsou spojité; $C^k(I)$ … funkce $y(x)$, které jsou spojité a jejichž derivace až do řádu k včetně jsou také spojité na I.
Řešením rovnice (9) rozumíme funkce $y(x) \in C^n(I)$, která splňuje (9) pro $\forall x \in I$.

Klíčový předpoklad (P). O rovnici (9) budeme předpokládat, že $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ a $f(x)$ jsou spojité na I (otevřený interval), navíc $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

*** Věta 12.6.** Je dána rovnice (9) a platí předpoklad (P). Nechť $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné. Potom existuje jediná funkce $y(x) \in C^n(I)$, která řeší (9) na celém I, a splňuje počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_1 \\ y'(x_0) &= \eta_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \eta_n \end{aligned}$$

Poznámka. Rovnice řádu n … n počátečních podmínek. Existence řešení je zaručena na celém I (obor spojitosti a_i, f) – to je typické pro lineární rovnice.
Pro nelineární rovnice můžeme obecně čekat jenom lokální existenci řešení.

Značení. Při značení $\mathscr{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(n-k)}$ můžeme rovnici (9) přepsat jako $\mathscr{L}[y] = f$.
Speciální případ $f = 0$ je tzv. homogenní úloha

$$\mathscr{L}[y] = 0\,. \tag{10}$$

Věta 12.7. Nechť platí (P). Potom množina $\mathscr{H}$ všech řešení homogenní úlohy (10) tvoří lineární podprostor dimenze n v prostoru $C^n(I)$.

Definice. Fundamentálním systémem (F.S.) rovnice (9) rozumíme libovolnou bázi prostoru $\mathscr{H}$.
Tj. F.S. je n-tice funkcí $\{y_1, \dots, y_0\} \subset \mathscr{H}$ taková, že je-li $\tilde{y}(x)$ libovolné řešení úlohy (10), tak existují (jednoznačně určené) konstanty $c_1, \dots, c_n$ takové, že $\tilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$.

Příklad. Funkce $\{\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\}$ tvoří F.S. pro úlohu $y'' - \frac{2}{x}y' + y = 0$.

Věta 12.8. Nechť platí (P). Potom pro množinu $\mathscr{N}_f$ všech řešení úlohy (9) platí
$$\mathscr{N}_f = \left\{y_p + y;\ y \in \mathscr{H}\right\},$$
kde y_p je jedno libovolně, pevně zvolené (tzv. partikulární) řešení úlohy (9).

Dodatek. Je-li y_p libovolné řešení úlohy (9), a $\{y_1, \dots, y_0\} \subset \mathscr{H}$ je fundamentální systém, pak obecné řešení úlohy (9) má tvar
$$y_o(x) = y_p(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)\,,$$
kde $c_j \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. Obecný návod, jak nalézt fundamentální systém nebo partikulární řešení, neexistuje. Následující věta ale ukazuje, že můžeme nalézt řešení nehomogenní úlohy, pokud už máme fundamentální systém.

Lemma 12.2. Nechť platí (P) a nechť $\{y_1, \dots, y_0\}$ je fundamentální systém úlohy (9). Pro $x \in I$ definuji matici $U(x) = \{U_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ jako $U_{ij}(x) = y_j^{(i-1)}(x)$.
Potom pro každé $x \in I$ je $U(x)$ regulární matice.

Věta 12.9. [Variace konstant.] Je dána rovnice (9) $\mathscr{L}[y] = f$ a platí (P). Nechť $\{y_1, \dots, y_0\}$ je fundamentální systém. Nechť $c_1(x), \dots, c_n(x)$ splňují pro $\forall x \in I$ soustavu

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots c_n'(x)y_n(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots c_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)}\,.
\end{aligned}$$

Potom funkce $y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)y_j(x)$ je řešením úlohy (9).

Poznámka. Soustava ve Větě 12.9. má tvar $U(x)C(x) = B(x)$, kde $U(x)$ je regulární matice (Lemma 12.2.), $C(x) = (c_1'(x), \ldots c_n'(x))$ je neznámý vektor a $B(x) = (0, \ldots, 0, \frac{f(x)}{a_0(x)})$. Můžeme tedy spočíst $c_j'(x)$ a integrací získat $c_j(x)$.

Definice. Rovnice

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y = f(x)\,, \tag{11}$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ jsou konstanty ($b_0 \neq 0$), se nazývá lineární ODR řádu n s konstantními koeficienty. Značíme $\mathscr{K}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(n-k)}$. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = 0 \tag{12}$$

je odpovídající homogenní úloha.

Poznámka. Hlavní myšlenka teorie rovnic s konstantními koeficienty: hledejme řešení tvaru $y(x) = \exp(\lambda x)$. Pozoruji, že $\mathscr{K}[\exp(\lambda x)] = p(\lambda)\exp(\lambda x)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^{n-k}\,. \tag{13}$$

Tedy: je-li λ_0 kořenem polynomu $p(\lambda)$, tak funkce $\exp(\lambda_0 x)$ je řešením homogenní úlohy.

Definice. Polynom (13) se nazývá charakteristický polynom rovnice (11).

Poznámky. Každý polynom $p = p(\lambda)$ lze napsat jako

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

kde $\lambda_1, \dots \lambda_s \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různé kořeny, a $n_1, \dots n_s$ jsou jejich násobnosti.
Platí: $n_1 + \cdots + n_s$ rovná se stupeň polynomu.
Dále: λ_0 je kořen polynomu $p(\lambda)$ násobnosti k, právě když $0 = p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \cdots = p^{(k-1)}(\lambda_0)$, avšak $p^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.
Ke stupni polynomu: $a\lambda + b$, kde $a \neq 0$, je polynom stupně 1. Nenulová konstanta je polynom stupně 0. Identicky nulová funkce se považuje za polynom záporného stupně.

Lemma 12.3. Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Potom pro $\forall l \geq 0$ celé

$$\mathscr{K}[x^l \exp(\lambda x)] = \exp(\lambda x) \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j}\,.$$

Důsledek. Je-li λ_0 kořen char. polynomu násobnosti k, pak funkce $\exp(\lambda_0 x)$, $x \exp(\lambda_0 x)$, ..., $x^{k-1} \exp(\lambda_0 x)$ řeší homogenní úlohu (12).

Poznámka. Připomeňme tvrzení (které plyne např. jako speciální případ Věty 11.6): je-li $q(x)$ polynom a $q(x) \equiv 0$, tak nutně $q(x)$ je triviální (tj. má všechny koeficienty nulové.)
Totéž řečeno jinak: funkce 1, x, x^2, $\dots x^k$, $\dots$ jsou lineárně nezávislé.
Následující lemma můžeme chápat jako zobecnění tohoto faktu.

Lemma 12.4. Nechť $\lambda_j \in \mathbb{C}$ jsou vzájemně různá čísla, nechť $q_j(x)$ jsou polynomy. Jestliže $\sum_{j=1}^m q_j(x) \exp(\lambda_j x) \equiv 0$, pak nutně $q_j(x) \equiv 0$ pro $\forall j$.

Věta 12.10. [F.S. pro $\mathscr{K}[y] = 0$.] Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechť λ_j, $j = 1, \dots, s$, jsou jeho kořeny, a n_j, $j = 1, \dots s$, jsou odpovídající násobnosti. Potom funkce

$$x^l \exp(\lambda_j x) \qquad j = 1, \dots s,\; l = 0, \dots n_j - 1$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (12).

Příklad. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0$, charakteristický polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 2)^2$$

-1 je 3-násobný, 2 je 2-násobný kořen, $\Longrightarrow$ fundamentální systém:

$$\big\{ \exp(-x), x\exp(-x), x^2 \exp(-x), \exp(2x), x\exp(2x) \big\}$$

obecné řešení:

$$K_1 \exp(-x) + K_2 x \exp(-x) + K_3 x^2 \exp(-x) + K_4 \exp(2x) + K_5 x \exp(2x)$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. V případě, že $p(\lambda)$ má komplexní kořeny:
1. možnost: celou teorii uvažujeme "komplexní", tj. hledáme řešení $y(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, počáteční podmínka $y^{(j-1)}(x_0) = \eta_j$, $j = 1, \dots, n$, kde $\eta_j \in \mathbb{C}$. Takto to funguje a nevadí mi komplexní b_k, ani komplexní kořeny.
2. možnost: chceme "reálnou" variantu, tj. hledáme jen řešení $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a předpokládáme $b_k \in \mathbb{R}$ (reálné koeficienty v rovnici.)
Z reálnosti b_k plynou dvě věci:
(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen $p(\lambda)$ násobnosti $k \implies \overline{\lambda}$ je kořen násobnosti k
(ii) funkce $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0 \implies$ funkce $\operatorname{Re} y(x)$, $\operatorname{Im} y(x)$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0$.
Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ kořen násobnosti k, získáme dle V.12.10 funkce

$$\begin{gathered} \exp(\lambda x),\ x\exp(\lambda x),\ \dots, x^{k-1}\exp(\lambda x) \\ \exp(\overline{\lambda} x),\ x\exp(\overline{\lambda} x),\ \dots, x^{k-1}\exp(\overline{\lambda} x) \end{gathered}$$

místo nich ale vezmeme jejich reálné a imaginární části (s užitím $\exp(\lambda x) = \exp(\alpha x)[\cos\beta x + i \sin\beta x]$)

$$\begin{gathered} \exp(\alpha x)\cos\beta x,\ x\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ \dots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\cos\beta x \\ \exp(\alpha x)\sin\beta x,\ x\exp(\alpha x)\sin\beta x,\ \dots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\sin\beta x \end{gathered}$$

- tak dojdeme k "reálné" verzi fundamentálního systému.

Příklad. $y'' + y = 0$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, kořeny $\pm i$. F.S.=$\{\exp(ix), \exp(-ix)\}$. Reálná verze F.S.: $\{\cos x, \sin x\}$.

Definice. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = q(x)\exp(\lambda_0 x)\,, \tag{14}$$

kde $q(x)$ je polynom, se nazývá rovnice se speciální pravou stranou.
Pravá strana je ten typ funkce, kterým se zabývá Lemma 12.3., a ze kterých umíme sestavit fundamentální systém (Věta 12.10.) Uvidíme, že v této situaci lze řešení uhodnout jako funkci předepsaného tvaru.

Poznámka. Nechť $q_s(x)$, $s = 0, \dots m$ jsou polynomy, kde stupeň q_s je s. Potom pro libovolný polynom $q(x)$ stupně m existují (jednoznačně určené) konstanty c_s, $s = 0, \dots m$ takové, že $q(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s q_s(x)$.

Věta 12.11. Je dána úloha (14), kde $q(x)$ je polynom stupně m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene charakteristického polynomu ($k = 0$ pokud λ_0 není kořen.)
Potom existuje $r(x)$ polynom stupně m takový, že $y(x) = x^k r(x) \exp(\lambda_0 x)$ je řešení (14).

Příklad. $y'' - y' - 2y = (x+1)\exp(2x)$. $\lambda_0 = 2$ je jednoduchý kořen char. polynomu, stupeň $q(x) = x+1$ je 1. Hledám řešení ve tvaru $y(x) = xr(x)\exp(2x)$, kde $r(x) = Ax + B$ je polynom stupně 1.
Dosazením do rovnice $A = 1/6$, $B = 2/9$.

Věta 12.11.' Je dána úloha

$$\mathscr{K}[y] = \exp(\alpha x)\left[q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x\right], \tag{15}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně $\leq m$. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu.
Potom existují polynomy r_1, r_2 stupně $\leq m$ takové, že

$$y(x) = x^k \exp(\alpha x)[r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x]$$

je řešení (15).

Příklad. $y'' + y' - y = \cos x$. Typ (15), $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, tj. $m = 0$, číslo $\lambda = i$ není kořen char. polynomu.
Hledám řešení ve tvaru $y(x) = A\cos x + B\sin x$, dosazením do rovnice vyjde $A = -2/5$, $B = 1/5$.

Poznámka. Příklad ukazuje, že Větu 12.11.' nelze zjednodušit v tom smyslu, že pokud pravá strana obsahuje jenom cos, pak najdu řešení, obsahující také jenom cos.

Poznámka. Soustavu n-rovnic lineárních rovnic 1. řádu $X' = AX$, kde $X = X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ jsou neznámé funkce, matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ lze řešit postupným převedením na 1 rovnici vyššího řádu.
Stručně: z první rovnice $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$ vyjádříme např. $x_2 = L(x_1', x_1, x_3, \dots x_n)$, derivací $x_2' = L(x_1'', x_1', x_3', \dots x_n')$, kde $L(\dots)$ je nějaká lineární kombinace.
Dosazením do zbylých $n - 1$ rovnic dostaneme soustavu, která neobsahuje x_2, je však řádu 2 (obsahuje x_1''). Atd.

Příklad. Soustava

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= -\,6x + y \end{aligned}$$

Z první rovnice: $y = 2x - x'$, $y' = 2x' - x''$, dosazením do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 2x' - x'' &= 2x - (2x - x') \\ x'' - 3x' - 4x &= 0 \\ \text{charakteristický polynom:} \quad p(\lambda) &= (\lambda - 4)(\lambda + 1) \\ \text{obecné řešení:} \quad x(t) &= K \exp(4t) + L \exp(-t) \end{aligned}$$

a protože $y = 2x - x'$, je $y(t) = -2K \exp(4t) + 2L \exp(-t)$.

Definice. Rovnice

$$\mathscr{E}[y] = f(x)\,, \qquad \mathscr{E}[y] = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^{(n-k)}\,, \tag{16}$$

$b_k \in \mathbb{C}$, $b_0 \neq 0$, se nazývá Eulerova rovnice.
Jde o speciální případ rovnice (9), kde $a_k(x) = b_k x^{n-k}$. Předpoklad (P) je splněn v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, kde také rovnici uvažujeme.

Postup řešení. Hledáme řešení ve tvaru $y(x) = |x|^\lambda$. Dostaneme $\mathscr{E}[y] = |x|^\lambda p(\lambda)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - (n-k) + 1) \tag{17}$$

je charakteristický polynom rovnice (16).
Odtud: je-li λ_0 kořen $p(\lambda)$ násobnosti k, pak funkce

$$|x|^\lambda, \ln|x| \cdot |x|^\lambda, \dots, \ln^{k-1}|x| \cdot |x|^\lambda$$

řeší homogenní úlohu $\mathscr{E}[y] = 0$, a lze z nich sestavit fundamentální systém.

13. Stejnoměrná konvergence.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I bodově k funkci $f(x)$, jestliže pro $\forall x \in I$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Značíme $f_n(x) \to f(x)$ v I.

Příklady. ① $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Potom $p_n(x) \to \exp x$ v $\mathbb{R}$.
② $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$. Potom $f_n(x) \to \operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$.
③ $f_n(x) = n^2 x \exp(-nx) \to 0$ v $[0, \infty)$.

Poznámka. Příklady demonstrují některé nedostatky bodové konvergence. Pokud $f_n(x) \to f(x)$, a $f_n(x)$ jsou spojité, pak $f(x)$ nemusí být spojitá (příklad 2).
Pokud $f_n(x) \to f(x)$ v $[a,b]$, nemusí být $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ (příklad 3 pro $[a,b] = [0,1]$).
To nás motivuje k zavedení lepšího, silnějšího pojmu konvergence funkcí.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I stejnoměrně k funkci $f(x)$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big]. \tag{18}$$

Značíme $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I.

Poznámka. $f_n(x) \to f(x)$ bodově v I, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in I)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big]. \tag{19}$$

Rozdíl je pouze v pořadí kvantifikace x a n_0. Při bodové konvergenci nejprve fixuji x, pak volím n_0, tj. n_0 může obecně záviset na x.
Při stejnoměrné konvergenci najdu jedno n_0, které pak funguje pro všechna $x \in I$.

Věta 13.1. Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v I, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I. Potom $f(x)$ je spojitá v I.

Věta 13.2. Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v omezeném intervalu $[a,b]$, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $[a,b]$. Potom $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ pro $n \to \infty$.

Poznámka. $K = \sup_{x \in I} g(x)$ znamená 1. $g(x) \leq K$ pro $\forall x \in I$ a 2. $\forall K' < K$ $\exists x \in I$ tak, že $g(x) > K'$. Souhrnně: K je nejmenší horní odhad pro $g(x)$ na I.

Lemma 13.1. [sigma en.] Nechť $f_n(x)$ jsou definovány v I. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\sigma_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$. Potom je ekvivalentní:

(1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
(2) $\sigma_n \to 0$ pro $n \to \infty$

Poznámka. Často užívané úvahy:
1. Jestliže existují a_n (čísla nezávislá na x) taková, že $a_n \to 0$ a platí $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ pro $\forall x \in I$, tak potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I.
2. Jestliže existují $x_n \in I$ taková, že $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$, pak $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ v I.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \to 0$ v $[0,\infty)$; $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $[0,\infty)$; pro $\forall \eta > 0$ pevné $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $[\eta,\infty)$; pro žádné $\delta > 0$ není $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $[0,\delta)$.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ lokálně stejnoměrně v I, jestliže

$$(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)\big[f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ v } I \cap U(x_0,\delta)\big]\,.$$

Značíme $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f(x)$ v I.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $(0,\infty)$, avšak $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ v $(0,\infty)$.

Poznámky. Zjevně platí: stejnoměrná konvergence se přenáší na menší množinu, tj. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I, $J \subset I \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v J.
Dále: stejnoměrná konvergence $\implies$ lokálně stejnoměrná konvergence $\implies$ bodová konvergence. (Žádnou implikaci nelze obrátit.)

Věta 13.1.' Nechť $f_n(x) \in C(I)$, nechť $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f(x)$ v I. Potom $f(x) \in C(I)$.

Poznámka. Připomeňme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje (tj. $\exists a \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \to a$), právě když platí Bolzano-Cauchyho podmínka konvegence:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m,n \ge n_0\big)\big[|b_m - b_n| < \varepsilon\big]\,. \qquad \text{(BC)}$$

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall m,n \ge n_0\big)\big[|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big]\,. \quad (\text{BC} - \text{st})$$

Věta 13.3. Nechť $f_n(x)$ jsou definovány v I. Potom je ekvivalentní:

(1) existuje funkce $f(x)$ taková, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
(2) $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence

Důsledek. $C([a,b])$ je úplný metrický prostor.

Poznámka. Jsou-li $f_n(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, pak obecně

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

Příklad. Nechť $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x/n)$; potom $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to\infty} f_n(x)) = \pi/2$, zatímco $\lim_{x\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = 0$.

Věta 13.4. [Moore-Osgood.] Nechť $f_n(x)$, $f(x)$ jsou definovány v $\mathcal{P}(x_0,\delta)$ (x_0, $\delta > 0$ pevné.)
Nechť
1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{P}(x_0,\delta)$;
2. pro $\forall n$ pevné existuje konečná $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ – značme ji c_n.

Potom
1. existuje konečná $\lim_{n\to\infty} c_n$ – značme ji c;
2. platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.

Poznámka. Závěr 2 vlastně říká

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Může být $x_0 = \pm\infty$, a platí jednostranné verze (tj. pro $x \to x_0\pm$, pracuji na $\mathcal{P}_\pm(x_0,\delta)$.)

Poznámka. Další nevýhodou bodové konvergence je, že obecně

$$f_n(x) \to f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x)\,,$$

dokonce ani

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x)\,.$$

Příklad. Polož $f_n(x) = n \operatorname{arctg} nx$; potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$, leč $f_n'(0) = 1$ pro $\forall n$, tj. $f_n'(x) \not\to 0$.

Věta 13.5. [Derivace člen po členu.] Nechť $f_n(x)$ jsou diferencovatelné v otevřeném intervalu I. Nechť existují $f(x)$, $g(x)$ takové, že $f_n(x) \to f(x)$, $f_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} g(x)$ v I.

Potom $f(x)$ je diferencovatelná a $f'(x) = g(x)$ v I.

Poznámka. Věta v podstatě říká, že

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,.$$

Věta 13.5'.[Integrace člen po členu.] Nechť $u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} u(x)$ v I, nechť $\int u_n(x)\,dx = U_n(x)$ v I, a nechť $U_n(x) \to U(x)$ v I.
Potom $\int u(x)\,dx = U(x)$ v I.

Poznámka. Závěr věty zapsaný jinak:

$$\int \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int u_n(x)\,dx\,.$$

Definice. Nechť $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Označme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,.$$

Řekneme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konverguje stejnoměrně v I, jestliže existuje funkce $s(x) : I \to \mathbb{C}$ taková, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I.
Řekneme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně v I, jestliže existuje $s(x)$ taková, že $s_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} s(x)$ v I.

Věta 13.6. [Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady.]
Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v I.

Definice. Řekneme, že funkce $f_k(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku (BC-st-r) stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\,\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| < \varepsilon\Big]\,.$$

Věta 13.7. Nechť $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Potom je ekvivalentní:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I
(2) $f_k(x)$ splňují v I (BC-st-r)

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I, jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 13.8. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I. Potom konverguje stejnoměrně v I.

Věta 13.9. [Weierstrass.] Jsou dány $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$. Nechť existují čísla a_k (nezávislá na x) taková, že
1. $|f_k(x)| \leq a_k$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$ konverguje lokálně absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Nekonverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Poznámka. Užitečné odhady: $|\sin y| \leq |y|$, $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}$; $0 \leq \ln(1+y) \leq y$ pro $\forall y \geq 0$.

Věta 13.10. [Stejnoměrná verze Leibnizova kritéria.] Nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\left\{g_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{kx}{1+k^2x^2}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, +\infty)$ pro $\forall \delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, +\infty)$.

Definice. Řekneme, že $f_n(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I, jestliže

$$\left(\exists M > 0\right)\left(\forall x \in I\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left[|f_n(x)| \leq M\right].$$

Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, jestliže

$$\left(\exists M > 0\right)\left(\forall x \in I\right)\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\left[\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big| \leq M\right].$$

Věta 13.11. [Stejnoměrná verze Dirichletova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\left\{g_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Poznámka. Z Lemmatu 10.4 plyne pro $\forall x \neq 2k\pi$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro $\delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, \delta]$.

Poznámka. Nechť existuje n_0 (nezávislé na x) takové, že $f_k(x) = g_k(x)$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \geq n_0$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 13.12. [Stejnoměrná verze Abelova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Nechť $g_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 13.13. Nechť $f_k(x) \in C(I)$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Označme $s(x)$ její součet. Potom $s(x) \in C(I)$.

Příklad. Z dřívějška víme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x), \qquad \forall x \in (-1, 1).$$

Podle Věty 13.12 řada vlevo konverguje stejnoměrně v $[0, 1]$; podle Věty 13.13 je její součet $s(x)$ spojitý v $[0, 1]$, speciálně je spojitý v bodě 1 zleva.
Tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s(1) = \lim_{x \to 1-} s(x) = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Třetí rovnost díky tomu, že $s(x) = \ln(1+x)$ na $P_{-}(1)$; čtvrtá ze spojitosti fce ln.

Věta 13.14. Nechť $f_k(x) \in C(I)$, kde $I = [a, b]$ je omezený, uzavřený interval. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Věta 13.15. Nechť $f_k(x)$ jsou diferencovatelné v I (otevřený interval). Nechť pro $\forall x \in I$ pevné $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v I. Potom součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je diferencovatelná funkce a platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,, \qquad \forall x \in I\,.$$

14. Míra a integrál.

Značení. Jsou-li A_j, $j \in \mathbb{N}$ množiny, definuji

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \left\{x:\ \exists j \in \mathbb{N}\ x \in A_j\right\} \tag{20}$$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left\{x:\ \forall j \in \mathbb{N}\ x \in A_j\right\} \tag{21}$$

- tzv. spočetné sjednocení/průnik. "Spočetný" je zkratka za "indexovaný přirozenými čísly". (Viz kapitola X. minulého semestru.) Termín spočetný se také zkracuje řeckým σ.

Definice. Nechť X je libovolná množina. Předpis μ, který množině $A \subset X$ přiřazuje číslo $\mu A \in [0, \infty]$, se nazývá míra v X, jestliže
(M1) $\mu\emptyset = 0$
(M2) $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$ disjunktní $\implies$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j\,.$$

Poznámka. Axiom (M2) speciálně implikuje, že jsou-li A, B disjunktní, je $\mu(A+B) = \mu A + \mu B$, neboli míra je aditivní, v plné obecnosti (M2) říká, že míra je σ-aditivní.

Příklady. ① počítací míra v $\mathbb{N}$: je-li $A \subset \mathbb{N}$ konečná, polož πA = počet prvků A; je-li nekonečná, polož $\pi A = \infty$.
② Diracova míra v $\mathbb{R}$: je-li $A \subset \mathbb{R}$, polož $\delta_0(A) = 1$, pokud $0 \in A$, v opačném případě $\delta_0(A) = 0$.
③ intuitivní pojem plochy, objemu má vlastnosti míry v $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Věta 14.1. [Základní vlastnosti míry.] Nechť μ je míra. Potom
1. $A \subset B \implies \mu A \le \mu B$
2. $A_j \subset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$$

3. A_j, $j \in \mathbb{N}$ libovolné $\implies$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j$$

Poznámka. Cíl Lebesgueovy teorie: zavést míru, která množině $A \subset \mathbb{R}^n$ přiřazuje číslo, vyjadřující její n-dimenzionální objem. (1-dimenzionální objem = délka, 2-dimenzionální objem = plocha).
Další rozumné vlastnosti: míra se nemění posunutím, otočením; u známých těles dá to, co čekáme (objem koule, krychle.)
Následující pozoruhodné tvrzení ukazuje, že to není tak jednoduché.

Banach-Tarského paradox. Nechť B je koule o poloměru 1, nechť $\tilde{B}$ je koule o poloměru 2.
Existují množiny F_j, $j = 1, \dots, N$ (vzájemně disjunktní) a množiny G_j, $j = 1, \dots, N$ (vzájemně disjunktní) takové, že

$$B = \bigcup_{j=1}^{N} F_j\,, \qquad \tilde{B} = \bigcup_{j=1}^{N} G_j\,.$$

Navíc, G_j vznikne z F_j posunutím a otočením.

Definice. Interval v $\mathbb{R}^n$: pro $n = 1$ víme, pro $n \ge 2$ je to kvádr, tj. kartézský součin

$$\begin{aligned} I &= I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \\ &= \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : \ x_j \in I_j,\ j = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

kde $I_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ jsou intervaly v $\mathbb{R}$.
Definujeme n-dimenzionální objem intervalu $|I|$ jako jeho délku (pokud $n = 1$), pro $n \ge 2$ jako součin délek stran, přičemž platí speciální úmluva

$$0 \cdot \infty = 0\,.$$

Příklady. Předchozí definice speciálně zahrnuje: jednobodová množina je interval (kartézský součin jednobodových intervalů), její n-dimenzionální objem je 0 (pro $\forall n$).
Podprostor nižší dimenze je též interval s nulovým objemem, např.

$$J = \{\langle x, y\rangle : \ x \in \mathbb{R}, \ y = 0\}$$

je interval v $\mathbb{R}^2$ ($J = \mathbb{R} \times [0, 0]$), jeho dvoudimenzionální objem je $\infty \cdot 0 = 0$.

*** Věta 14.2.** [Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.] Existuje $\mathcal{M}_n$ systém podmnožin $\mathbb{R}^n$ a funkce $\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$ s následujícími vlastnostmi:
(A1) $\emptyset \in \mathcal{M}_n$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n$
(A2) $A \in \mathcal{M}_n \implies \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}_n$
(A3) $A_j \in \mathcal{M}_n$, $j \in \mathbb{N} \implies \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, $\cap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}_n$
Dále: λ_n má na $\mathcal{M}_n$ vlastnosti míry, tj.
(M1) $\lambda_n \emptyset = 0$
(M2) $A_j \in \mathcal{M}_n$ ($j \in \mathbb{N}$) disjunktní $\implies$

$$\lambda_n \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n A_j \,.$$

Terminologie: λ_n se nazývá Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$, neboli Lebesgueova n-dimenzionální míra. Systém $\mathcal{M}_n$ jsou tzv. Lebesgueovsky měřitelné, neboli λ_n-měřitelné množiny v $\mathbb{R}^n$.
Dále platí:
(R1) $I \subset \mathbb{R}^n$ je interval $\implies$ $I \in \mathcal{M}_n$ a $\lambda_n I = |I|$
(R2) $A \in \mathcal{M}_n$, B vznikne z A posunutím, otočením nebo symetrií $\implies$ $B \in \mathcal{M}_n$ a $\lambda_n B = \lambda_n A$
(R3) $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $F \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená $\implies$ G, $F \in \mathcal{M}_n$

Poznámka. Existují množiny v $\mathbb{R}^n$, které nepatří do $\mathcal{M}_n$. Jsou to tzv. neměřitelné množiny; snaha přiřadit jim míru by vedla ke sporu. Příkladem neměřitelných množin jsou G_j, F_j v Banach-Tarského paradoxu.
Systém $\mathcal{M}_n$ je nicméně pro praktické účely dostatečný. Běžnými množinovými operacemi neměřitelné množiny nevznikají.

Poznámka. Důležitý pojem: množina míry nula neboli nulová množina je taková měřitelná $A \subset \mathbb{R}^n$, že $\lambda_n A = 0$.
Příklady: jednobodová množina, podmožina nižší dimenze (přímka v $\mathbb{R}^2$, rovina v $\mathbb{R}^3$).

Spočetná množina má míru 0, spočetné sjednocení spočetných množin má míru 0.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Řekneme, že výrok $V(x)$ platí skoro všude v M, jestliže existuje $N \subset M$ nulové míry tak, že $V(x)$ platí pro $\forall x \in M \setminus N$.
Zkratka: s.v.

Příklady. ① $\sin x \neq 0$ s.v. $\mathbb{R}$.
② skoro každé reálné číslo je iracionální.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná. Funkce $f(x) : M \to [-\infty, \infty]$ se nazve měřitelná, jestliže pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in M : \ f(x) > \alpha\}$$

měřitelná.

Lemma 14.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f(x) : M \to [-\infty, \infty]$.
Potom je ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je měřitelná
(2) pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in M : \ f(x) \in I\}$$

měřitelná.

Definice. Charakteristická funkce množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Funkce $s(x) : M \to \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá, jestliže

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{M_j}(x) . \tag{22}$$

kde $a_j \in \mathbb{R}$ a $M_j \subset M$ jsou měřitelné množiny.

Poznámky.
• jednoduchá funkce je měřitelná.
• jednoduchou funkci lze zapsat více způsoby, např.

$$2\chi_{(0,1)} + \chi_{[1,2)} = \chi_{(0,1)} + \chi_{(0,2)} ;$$

vždy existuje zápis, při kterém M_j jsou vzájemně disjunktní.

Lemma 14.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, nechť $f(x) : M \to [0, \infty]$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je měřitelná;
(2) existují $s_n(x)$ jednoduché funkce takové, že $0 \le s_n(x) \nearrow f(x)$ pro $\forall x \in M$.

Vysvětlení značení. Symbol $a_n \nearrow a$ značí: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to a$, přičemž $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost.

Definice. [Lebesgueův integrál nezáporné funkce.] Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina.
1. je-li $s(x) : M$ jednoduchá funkce, vyjádřená v (22), definujeme

$$\int_M s(x)\, dx = \sum_{j=1}^{N} a_j \lambda_n(M_j)\,.$$

2. je-li $f(x)$ nezáporná, měřitelná, definujeme

$$\int_M f(x)\, dx$$

jako supremum množiny

$$\Big\{ \int_M s(x)\, dx : \; s(x) \text{ jednoduchá, } 0 \le s(x) \le f(x) \text{ pro } \forall x \in M \;\Big\}\,.$$

Poznámky.
• definice je korektní: integrál jednoduché funkce nezávisí na tom, jak je vyjádřena. Druhá část definice dává pro jednoduchou funkci stejný výsledek jako první.
• přímo z definice vidíme: je-li $0 \le g(x) \le f(x)$ pro $\forall x \in M$, je

$$(L) \int_M g(x)\, dx \le (L) \int_M f(x)\, dx\,,$$

neboť vpravo je supremum větší množiny.
• tento integrál se nazývá Lebesgueův n-rozměrný integrál, nebo integrál dle n-rozměrné Lebesgueovy míry. Chceme-li zdůraznit, že jde o Lebesgueův

integrál (na rozdíl od Newtonova, nebo Riemannova), píšeme $(L)\int_M f(x)\,dx$.
Není-li řečeno jinak, máme na mysli vždy Lebesgueův integrál.
Jiné zápisy Lebesgueova integrálu:

$$\int_M f\,d\lambda_n\,, \qquad\qquad \int_M f(x)\,d\lambda_n(x)\,,$$

chceme-li zdůraznit míru, podle níž se integruje, nebo míru i proměnnou.
Ve speciálním případě funkce jedné proměnné, tj. integrace v $\mathbb{R}$, používáme též značení $\int_a^b f(x)\,dx$, s významem $\int_{(a,b)} f(x)\,d\lambda_1(x)$.

Věta 14.3. [Leviho věta.] Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Nechť $f_n(x)$, $f(x)$ jsou měřitelné funkce, a $0 \le f_n(x) \nearrow f(x)$ pro $\forall x \in M$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\,dx = \int_M f(x)\,dx\,.$$

Lemma 14.3. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou nezáporné, měřitelné v M. Potom

$$\int_M f(x) + g(x)\,dx = \int_M f(x)\,dx + \int_M g(x)\,dx\,.$$

Definice. Definujeme kladnou resp. zápornou část funkce $f(x)$ jako

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}\,,\\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\}\,. \end{aligned}$$

Pozorujeme: $0 \le f^+,\ f^- \le |f|$, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.
Pokud $f(x)$ je měřitelná, jsou $f^+(x)$, $f^-(x)$ měřitelné.

Definice. Je-li $f(x) : M \to [-\infty, \infty]$ měřitelná funkce, definujeme její Lebesgueův integrál přes M jako

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M f^+(x)\,dx - \int_M f^-(x)\,dx\,,$$

má-li výraz vpravo smysl.

Poznámky.
• Výraz vpravo nemá smysl (a tedy integrál neexistuje), právě když $\int_M f^+ = \int_M f^- = \infty$.

• množinu funkcí, pro něž integrál existuje (konečný, nebo nekonečný), značíme $L^*(M)$.
• množinu funkcí, pro něž integrál existuje a je konečný, značíme $L(M)$. Zjevně $L(M) \subset L^*(M)$.

Důležitá poznámka. Jestliže $f(x) = g(x)$ skoro všude v M, pak

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M g(x)\,dx$$

(má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.)

Doplnění definice. Nechť $f(x)$ je definována skoro všude v M (tj. v $M \setminus N$, kde míra N je nula). Potom integrál funkce $f(x)$ definuji jako

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M \tilde{f}(x)\,dx\,,$$

kde $\widetilde{f(x)}$ je $f(x)$, dodefinovaná v N libovolně[1] (např. nulou).

Věta 14.4. [Vlastnosti $L(M)$.]
(1) $f(x) \in L(M) \implies f(x)$ je konečná skoro všude v M
(2) $f(x)$, $g(x) \in L(M) \implies \alpha f(x)$, $f(x) + g(x) \in L(M)$ a platí

$$\int_M \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_M f(x)\,dx$$
$$\int_M f(x) + g(x)\,dx = \int_M f(x)\,dx + \int_M g(x)\,dx$$

(3) $f(x) \in L(M) \implies |f(x)| \in L(M)$ a platí

$$\left|\int_M f(x)\,dx\right| \leq \int_M |f(x)|\,dx\,.$$

(4) $f(x)$ měřitelná, $|f(x)| \leq g(x)$ skoro všude v M, kde $g(x) \in L(M) \implies f(x) \in L(M)$

Poznámka. Záměná limity a integrálu, neboli rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\,dx = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \qquad (*)$$

[1]Neovlivní výsledek díky předchozí poznámce.

obecně neplatí. Příklad: $f_n(x)(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$. Potom $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, přitom $f_n(x) \to 0$ v $\mathbb{R}$, tedy vlevo je 1, vpravo 0.
Rovnost (*) platí, pokud
• navíc $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v M, a M je omezená množina (viz věta 13.2.) To jsou pro praktické účely příliš silné předpoklady.
• navíc $0 \leq f_n(x) \nearrow f(x)$ skoro všude v M – to je Leviho věta.
• třetí případ je následující věta.

Věta 14.5. [Lebesgueova věta.] Nechť funkce $f_n(x)$, $f(x)$ jsou měřitelné v M, $f_n(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in M$. Nechť existuje $g(x) \in L(M)$ tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude v M. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\, dx = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx\,.$$

Opakování. Newtonův integrál funkce $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ definujeme jako

$$(N) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\,,$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$.
Vztah mezi Newtonovým integrálem a jednorozměrným Lebesgueovým integrálem osvětluje následující věta.

Věta 14.6. [Výpočet Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}$.] Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť je splněn jeden z předpokladů:
1. $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) \leq 0$) všude v I
2. $\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty$
Potom

$$\int_a^b f\, d\lambda_1 = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\,,$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

Poznámky.
• věta v podstatě tvrdí rovnost Lebesgueova a Newtonova integrálu (za daných předpokladů)
• předpoklad 1 nebo 2 je podstatný; lze najít spojitou funkci, jejíž Lebesgueův integrál neexistuje, avšak přírustek primitivní funkce má smysl (dokonce je konečný).
• předpoklad 2 se může ověřovat pomocí bodu 1 (neboť $|f| \geq 0$)

Věta 14.7. [Leviho věta pro řady.] Nechť $f_k(x)$ jsou nezáporné, měřitelné v M. Potom
$$\int_M \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k(x)\,dx\,.$$

Příklad.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty\,.$$

Věta 14.8. [Lebesgueova věta pro řady.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje pro s.v. $x \in M$, nechť existuje $g(x)$ taková, že $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq g(x)$ pro $\forall n$, s.v. $x \in M$, přičemž $\int_M g(x)\,dx < \infty$. Potom
$$\int_M \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k(x)\,dx\,.$$

Příklad.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\,.$$

Poznámka. Na omezeném intervalu mi jako integrovatelná majoranta může posloužit konstantní funkce. To se často používá, získáváme tím tuto variantu Lebesgueovy věty: nechť $f_n(x) \to f(x)$, nechť $|f_n(x)| \leq C$ pro s.v. $x \in I$, kde I je omezený interval. Potom $\int_I f_n \to \int_I f$.

Poznámka. Názorný význam Lebesgueova integrálu: je-li $f(x)$ nezáporná v $M \subset \mathbb{R}^n$, je její integrál (dle n-rozměrné míry) roven (n+1)-rozměrné míře množiny pod grafem, tj.
$$\int_M f d\lambda_n = \lambda_{n+1}\big(\{\langle x_1, \dots, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1};\ 0 < f(x_1, \dots, x_n) < x_{n+1}\}\big)\,.$$

Srovnej se situací pro $n = 1$ - integrál funkce jedné proměnné se rovná plocha (tj. dvojrozměrná míra) množiny pod grafem.

Poznámka. Ještě ke značení: je-li $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, tak Lebesgueův integrál značíme $\int_M f\,d\lambda_n$, nebo $\int_M f(x)\,dx$, nebo $\int_M f(x)\,d\lambda_n(x)$. Závisí na tom, zda chceme zdůraznit míru, nebo proměnnou, nebo obojí. Pokud

chceme vyznačit jednotlivé složky proměnné, píšeme $\int_M f(x,y)\,dxdy$, nebo $\int_M f(x,y,z)\,dxdydz$.
Význam symbolu je ale vždy tentýž. Někdy se také píše $\iint$, $\iiint$ místo $\int$, aby se zdůraznilo, že jde o dvourozměrný (třírozměrný) integrál.

Značení. Pro $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ značíme proměnnou $\langle x,y\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Definujeme projekci M do $\mathbb{R}^n$

$$\Pi_n M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists y \in \mathbb{R}^m,\ \langle x,y\rangle \in M\}$$

a pro $x \in \Pi_n$ pevné definujeme řež množinou M vzhledem k y

$$M^x = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \langle x,y\rangle \in M\}\,.$$

Jestliže $f = f(x,y)$, tak $f(x,\cdot)$ značí funkci proměnné y, které vznikne fixováním x.

Věta 14.9. [Fubiniho věta.] (S použitím předchozího značení.) Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$, nechť $f(x,y) \in L^*(M)$. Potom pro skoro všechna $x \in \Pi_n$ je $M^x \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná množina, a $f(x,\cdot) \in L^*(M^x)$.
Označíme-li $g(x) = \int_{M^x} f(x,\cdot)d\lambda_m$, je $g(x) \in L^*(\Pi_n)$ a platí

$$\int_M f\,d\lambda_{n+m} = \int g\,d\lambda_n$$

neboli (v názornějším značení)

$$\int_M f(x,y)\,dxdy = \int_{\Pi_n} \left(\int_{M^x} f(x,y)\,dy\right)\,dx\,.$$

Příklad. $M = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 1\}$, $f(x,y) = |x|$. Potom $\Pi_1 M = (-1,1)$, $M^x = (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$, tedy

$$\int_M |x|\,dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |x|\,dy\right)\,dx = \frac{4}{3}\,.$$

Poznámky. Mechanické použití Fubiniho věty v případě, že $f \notin L^*(M)$, tj. původní vícenásobný integrál neexistuje, vede k nesmyslným výsledkům:

$M = (0,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x+1 \\ -1, & y < x < y+1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Potom $\int_M f(x,y)\,dxdy$ neexistuje (integrál kladné i záporné části je ∞), avšak

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\,dy \right\} dx = -\frac{1}{2}\,,$$

zatímco

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\,dx \right\} dy = \frac{1}{2}\,.$$

• předpoklad $f \in L^*(M)$ je určitě splněn, pokud $f \geq 0$, nebo pokud $\int_M |f| < \infty$ (druhý předpoklad může ověřit pomocí Fubiniho věty, neboť $|f| \geq 0$).

• speciálně, výpočet objemu pomocí Fubiniho věty:

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_M 1\,d\lambda_{n+m} = \int_{R^n} \left\{ \int_{M^x} 1\,d\lambda_m \right\} d\lambda_n = \int_{R^n} \lambda_m(M^x)\,d\lambda_n$$

Příklad. Použití Fubiniho věty k výpočtu původně jednorozměrného integrálu:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx\,.$$

Integrovaná funkce je přírustek, tj. integrál derivace

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b x^y\,dy\,.$$

Dvojím užitím Fubiniho věty ($M = (0,1) \times (a,b)$)

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy \right) dx = \int_M x^y\,dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx \right) dy = \ln\frac{b+1}{a+1}\,.$$

Opakování. Věta o substituci pro Newtonův integrál:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\,dx$$

kde $\varphi(x) : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je vzájemně jednoznačná, a $\varphi'(x) \neq 0$.

Definice. Pro $\varphi(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme Jakobián

$$J\varphi(y) = \det \nabla\varphi(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Definice. Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $\varphi(y) : \Omega \to M$ se nazve difeomorfismus, jestliže:
1. $\varphi(y)$ je vzájemně jednoznačné,
2. $\varphi(y)$ je C^1 (tj. parciální derivace jsou spojité),
3. $J\varphi(y) \neq 0$ pro $\forall y \in \Omega$.

*** Věta 14.10.** [Věta o substituci.] Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, $\varphi(y) : \Omega \to M$ je difeomorfismus a $f(x) : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Potom

$$\int_M f(x)\, dx = \int_\Omega f(\varphi(y)) J\varphi(y)\, dy\,,$$

neboli

$$\int_M f\, d\lambda_n = \int_\Omega (f \circ \varphi) J\varphi\, d\lambda_n\,.$$

(Má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.)

Poznámka. Význam věty o substituci pro vícerozměrné integrály je často v tom, že získám příjemnější (z hlediska Fubiniho věty) tvar množiny, přes kterou integruji.

Příklad. Plocha množiny M, ohraničené přímkami: $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 3x$, $y = 4x$. Substituce: $u = x + y$, $v = y/x$, neboli toto je zobrazení $\varphi^{-1} : M \to \Omega$, kde $\Omega = (1, 2) \times (3, 4)$.
$\varphi : \Omega \to M$ má tvar $x = u/(1+v)$, $y = uv/(1+v)$, jakobián $J\varphi = u/(1+v)^2$. Tedy

$$\lambda_2(M) = \int_M 1\, dxdy = \int_\Omega \frac{u}{(1+v)^2}\, dudv = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{u}{(1+v)^2}\, dv \right) du = \frac{3}{40}\,.$$

Polární souřadnice. Substituce $x = r\cos u$, $y = r \sin u$, tj. $\varphi : \langle r, u\rangle \mapsto \langle x, y\rangle$ je difeomorfismus z $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ do $\mathbb{R}^2 \backslash N$, kde $N = \{\langle x, y\rangle;\ x \geq$

$0,\ y = 0\}$. (To, že obrazem není celé $\mathbb{R}^2$, nevadí, neboť chybějící množina N má dvourozměrnou míru 0.) Jakobián je r.

Sférické souřadnice. Substituce $x = r\cos u \cos v$, $y = r\sin u \cos v$, $z = r\sin v$. Zobrazení $\varphi : \langle r, u, v\rangle \mapsto \langle x, y, z\rangle$ je difeomorfismus z $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ do $\mathbb{R}^3 \setminus N$, kde N je polorovina $y = 0$, $x \geq 0$, tj. opět množina míry nula. Jakobián je $r^2 \cos v$.
Názorně: $u \ldots$zeměpisná délka, $v \ldots$zeměpisná šířka (póly leží na ose z.)