Cvičení na variaci funkce

1. Dokažte, že funkce $f(0) = 0$ a $f(x) = x\sin(1/x)$ pro $x \in (0, 1/\pi]$ je spojitá v $[0, 1/\pi]$, a má zde nekončenou variaci.

2. Dokažte implikace:

$$f, g \in BV(I) \implies f + g \in BV(I)$$
$$f, g \in BV(I) \implies fg \in BV(I)$$

3. Sestrojte funkci takovou, že $f \notin BV(I)$, avšak $f \cdot f \in BV(I)$.

4. Ukažte, že BV funkce má nejvýše spočetně bodů nespojitosti, a že jde pouze o nespojitosti 1. druhu.

5. Pro zajímavost: Je dána funkce $f(x) : [a, b] \to R$. Takzvanou *Banachovu indicatrix* $N(f, y)$ definujeme jako počet prvků množiny

$$\{x \in [a, b];\ f(x) = y\}\,.$$

V roce 1925 dokázal S. Banach, že pro spojitou $f(x)$ platí

$$f \in BV([a, b]) \iff \int_{-\infty}^{\infty} N(f, y)\, dy < \infty\,.$$

Integrál vpravo je přímo roven variaci f.

6. Je-li $f \in C^1(I)$, platí

$$V(f; I) = \int_I |f'(x)|\, dx\,.$$

Poznámky.

$BV(I)$ = množina funkcí s konečnou variací na I

1. Spočtěte nejprve variaci f na intervalu $[1/((k + 1)\pi), 1/(k\pi)]$.
2. Uvědomte si, že BV funkce jsou omezené, a užijte rozpis

$$f(x_i)g(x_i) - f(x_{i+1})g(x_{i+1}) = \\ f(x_i)[g(x_i) - g(x_{i+1})] + g(x_{i+1})[f(x_i) - f(x_{i+1})]\,.$$

3. Viz příklad 1.
4. Nespojitost 1. druhu = existují vlastní jednostranné limity. Každá BV funkce lze napsat jako rozdíl monotónních, omezených funkcí. Nespojitost monotónní funkce = skok, kterých může být nejvýše spočetně mnoho.

5. S. Banach, "Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie", Fund. Math. 7 (1925), pp. 225–236

6. K důkazu $\leq$ použijte odhad $|f(x_{i-1}) - f(x_i)| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)|\,dx$.

U opačné nerovnosti uvažte, že $f(x_{i-1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)$, a odvoďte, že $V(f, I)$ je větší nebo rovna dolnímu Riemannovu integrálu $|f'|$.