Úlohy na Fourierovy řady

1. Sečtěte řadu $\sum_{n\geq 1} q^n \sin nx$, kde $q \in (-1, 1)$.
2. Sečtěte řadu $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{n!}$.
3. Nechť $f(x)$ je lipschitzovská na $(\pi/2, \pi)$. Ukažte, že lze psát

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \cos(2n-1)x\,.$$

4. Nechť f je 2π-periodická funkce.
(a) co lze říci o Fourierových koeficientech, pokud navíc $f(x+\pi) = f(x)$, resp. $f(x+\pi) = -f(x)$?
(b) pomocí Fourierových koeficientů $f(x)$ vyjádřete Fourierovy koeficienty posunuté funkce $f(x+h)$.
5. Nechť f je 2π-periodická funkce a a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Dokažte (a doplňte vhodné předpoklady na f):
(a) $a_k = 0$ pro $\forall k \geq 0 \implies f(x)$ je lichá
(b) $b_k = 0$ pro $\forall k \geq 1 \implies f(x)$ je sudá
6. Nechť $f \in L^1(0, 1)$ a

$$\int_0^1 f(x)x^m\,dx = 0\,, \qquad \forall m \geq 0 \text{ celé.}$$

Potom $f = 0$ s.v.
7. Nechť $f(x)$ je C^1, 2π-periodická funkce a $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. Potom

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx\,.$$

Kdy platí rovnost?
8. Nechť existují $c > 0$ a $N \geq 0$ celé tak, že

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{c}{k^{N+2}}\,. \tag{*}$$

Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

konverguje a její součet je funkce třídy C^N.

9. Nechť $f(x)$ je 2π-periodická funkce třídy C^N. Nechť navíc $f^{(N+1)}$ je po částech C^1. Potom Fourierovy koeficienty f splňují (*).

Návody.

1. Jde o geometrickou řadu, neboť $[\mathrm{e}^{ix}]^n = \cos nx + i \sin nx$.

2. Viz předchozí bod a rozvoj e^y do řady.

3. Dodefinujte f na $(-\pi, \pi)$ tak, aby její Fourierova řada obsahovala jenom liché cosinové členy.

5. Uvažte Fourierovu řadu funkce $f(x) \pm f(-x)$.

6. Uvažte rozvoje $\sin x$, $\cos x$ do mocninné řady a odvoďte, že Fourierovy koeficienty f (uvažované s 1-periodickým prodloužením) jsou nulové.

7. Použijte Parsevalovu rovnost a vztah mezi Fourierovými koeficienty f a f'.

8. Použijte Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, a větu o derivování řady člen po členu.