Příklady ke cvičení z MA 2b 2006/07

V této fázi bude občas cvičení předbíhat přednášku. Potřebné početní prostředky budou na cvičeních vyloženy a v lehčích případech budou i dokázána potřebná tvrzení. Prosím, nepodceňujte početní techniku, počítat je třeba se učit celý semestr, a je třeba spočítat více příkladů než jenom ty, které se probírají na cvičení!

Cvičení 129: Řešte rovnici $y'' = 2y^3$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$!
[Řešení: $y(x) = (1-x)^{-1}$; je nutno *včas* využít počátečních podmínek.]

Budeme se zabývat lineární závislostí funkcí. Jako průpravu se pokuste (cvičící vám eventuálně poradí) řešit následující úlohy.

Cvičení 130: Zjistěte, zda následující funkce tvoří lineárně nezávislý systém na $\mathbb{R}$ a svá tvrzení *dokažte*:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \{1,\ x^2,\ x^5\}, & \text{(b)} & \{\exp x,\ \exp 2x,\ \exp 3x\}, \\ \text{(c)} & \{5,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x\}, & \text{(d)} & \{x\exp x,\ x^2\exp x,\ x^3\exp x\}, \\ \text{(e)} & \{\sin x,\ \cos x,\ \cos 2x\}. & & \end{array}$$

[Všechny systémy kromě (c) jsou nezávislé.]

Cvičení 131: Zjistěte, zda jsou funkce $\{1,\ \arcsin x,\ \arccos x\}$ lineárně nezávislé na intervalu $[-1, 1]$! [Funkce jsou lineárně závislé.]

Cvičení 132: Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ funkce, jsou lineárně závislé funkce

$$(*) \qquad f,\ g,\ |f|,\ |g|,\ f^+,\ f^-,\ g^+,\ g^-,\ \max(f,g),\ \min(f,g)\,?$$

Jaká je minimální a maximální dimenze lineárního obalu všech funkcí $(*)$ v závislosti na volbě f a g? [Jsou; 0 při $f = g \equiv 0$ a 6 např. pro x a x^3]

Cvičení 133: Načrtněte směrové pole pro rovnici

$$\text{(a)}\quad y' = y - x^2, \qquad \text{(b)}\quad y' = y/(y-x).$$

Cvičení 134: Rovnice se separovanými proměnnými (použitý zápis neodpovídá našim úmluvám z přednášky, avšak často se s ním setkáte ve sbírkách příkladů)

$$x(y^2-1)\,dx + y(x^2-1)\,dy = 0$$

popisuje zajímavý systém křivek. Pokuste se je načrtnout!
[$(x^2-1)(y^2-1) = c$, $c \neq 0$; nezapomeňte na řešení $x(y) = \pm 1$, $y(x) = \pm 1$]

Cvičení 135: Určete obecná řešení rovnic:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

[$y(x) = c_1 \exp(-2x) + c_2 x \exp(-2x)$; $y(x) = c_1 \exp x + c_2 \exp 2x$;
$y(x) = c_1 \exp 3x \cos 2x + c_2 \exp 3x \sin 2x$]

Cvičení 136: Řešte rovnici $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$; zkuste funkci $f(x) = 1/x$!
[$y(x) = c_1x^3 + c_2/x + x^4$]

Cvičení 137: Určete obecná řešení rovnic:

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$
$$y^{(4)} - y = y'''' - y = 0$$
$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 5y^{(3)} - 2y' + 5y = 0$$

[$y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + c_3\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$; $y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$; $y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^x(c_3 + c_4\cos 2x + c_5\sin 2x)$]

Cvičení 138: Určete řešení rovnice $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, [y"(0)=3. $y(x) = \mathrm{e}^x(1 + x)$]

Cvičení 139: Určete řešení následujících rovnic, vyhovující daným podmínkám:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = 0, &\qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0 \\ y'' - 3y' + 2y = 0, &\qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 3 \\ y'' - 6y' + 13y = 0, &\qquad y(0) = 1,\ y(2\pi) = \exp(6\pi) \\ y'' - 4y' + 3y = 0, &\qquad y(0) = 6,\ y'(0) = 10 \end{aligned}$$

[$y(x) = 0$; $y(x) = \exp x + \exp 2x$; $\ldots$]

Cvičení 140: Nalezněte obecná řešení diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' = 3x\exp -3x\,, &\qquad [\,c_1 + (c_2 - x^2/2 - x/3)\exp -3x\,] \\ y'' + y = 4x\cos x\,, &\qquad [\,c_1\cos x + c_2\sin x + x\cos x + x^2\sin x\,] \\ 7y'' - y' = 14x, &\qquad [\,c_1 + c_2\exp(x/7) - 7x^2 - 98x\,] \\ y'' - y' = \exp x\sin x, &\qquad [\,c_1 + c_2\exp(x) - (1/2)\exp x)(\cos x + \sin x)\,] \end{aligned}$$

Cvičení 141: Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + y' + y = (x + x^2)\,\exp x\,!$$

$$\left[\ \big(c_1\cos(\sqrt{3}/2)x + c_2\sin(\sqrt{3}/2)x\big)\exp(-x/2) + \frac{\exp x}{3}(x^2 - x + 1)\right]$$

Cvičení 142: Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 2y' + y = x^2\mathrm{e}^{-x}\cos x$!
$$\left[\ y(x) = \frac{x^4}{24} + c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + c_5\right)\right]$$

Cvičení 143: Řešte rovnice:

$$y'' - 6y' + 9y = 25\,\mathrm{e}^x\sin x\,, \qquad y'' + y = 4x\cos x\,,$$
$$y''' - 4y' = x\mathrm{e}^{2x} + \sin x + x^2\,!$$

[$y(x) = (c_1 + c_2x)\,\mathrm{e}^{3x} + (4\cos x + 3\sin x)\,\mathrm{e}^x$; $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x^2\sin x + {}$ $+ x\cos x$; $y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-2x} + (\cos x)/5 - x^3/12 - x/8 + \mathrm{e}^{2x}(2x^2 - 3x)/32$.]