Absolutní spojitost

1. Funkce $f(x)$ se nazve absolutně spojitá v I, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon\,,$$

kde (a_i, b_i) jsou libovolné *disjunktní* intervaly v I, splňující

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta\,.$$

Značíme $f \in AC(I)$.

2. Dokažte:
(a) absolutně spojitá funkce je spojitá
(b) Lipchitzovská funkce, C^1 funkce je absolutně spojitá
(c) absolutně spojitá funkce (na omezeném intervalu) má konečnou variaci

3. Dokažte:
(a) $f,\, g \in AC(I) \implies f \pm g,\, fg \in AC(I)$
(b) $f \in AC(I),\, g \in AC(J),\, f : I \to J \implies g \circ f \in AC(I)$
(c) $f,\, g \in AC(I) \implies |f|,\, \max\{f, g\},\, \min\{f, g\} \in AC(I)$

4. Absolutně spojitá funkce se dá napsat jako rozdíl dvou absolutně spojitých, neklesajících funkcí.

Návody.
2(a) $n = 1$.
2(b) Volte $\delta = \varepsilon/L$, kde L je Lipchitzovská konstanta; $C^1 \implies$ Lipschitzovská
2(c) Důsledek 4.
3(a) Viz druhý příklad série 6.
3(b) přímočarý důkaz
3(c) pro $|f|$ použiji nerovnost $||A| - |B|| \leq |A - B|$; dále $\max\{A, B\}$ lze vyjádřit pomocí $|\cdot|$
4. Viz analogické tvrzení pro BV funkce – stačí uvážit, že neurčitá variace absolutně spojité funkce je opět absolutně spojitá.