5. TERMÍN – 16.2.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. Je dána posloupnost funkcí

$$f_k(x) = \ln\left(\frac{x^2+kx+k^2}{x^2+k^2}\right).$$

(a) Najděte *bodovou* limitu $f(x)$ pro $x \geq 0$.
(b) Rozhodněte (podrobně zdůvodněte), zda $f_k \rightrightarrows f$ v intervalech $[0, K]$ resp. $[K, \infty)$, kde $K > 0$ je pevné.
(c) Rozhodněte (podrobně zdůvodněte), zda řada $\sum_k (-1)^k [f_k(x) - f(x)]$ stejnoměrně konverguje v intervalech $[0, K]$ resp. $[K, \infty)$, kde $K > 0$ je pevné.
(d) Je konvergence absolutně stejnoměrná?

---

2. Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_0^{7\pi/4} (y')^2 - 4y^2 - xy'\,dx$$
$$y(0) = 1, \quad y(7\pi/4) = -1.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

---

3. Nechť

$$F(a) = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^a}\,dx.$$

(a) Najděte maximální interval $I = \{a \in \mathbb{R}; F(a) < \infty\}$.
(b) Dokažte, že funkce $F(a)$ je spojitá v I.
(c) Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} F(n)$ a $\lim_{n\to\infty} F(\frac{n+1}{n})$.

---

4. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je dána vztahy $(a > 0)$

$$\{(x^2+y^2)^3 < 4a^2x^2y^2\} \cap \{0 < z < x^2+1+y^2\}$$

(a) Spočítejte objem (trojrozměrnou míru) Ω.
(b) Ukažte, že $\partial\Omega$ je zobecněná plocha – najděte parametrizace jednotlivých částí.

1. příklad [9b]

(a) [1] ... bodová limita

(b) [3.5] ... 2 za [0,K] a 1.5 za [K,\infty)

(c) [2.5] ... 1.5 za [0,K] (stejnoměrná monotonie), 1 za [K,\infty).

(d) [2] ... správně odůvodněné NE (řádové rovnosti!)

---

2. příklad [7b]

[1] ... sestavení E.L. rovnice
[2] ... 1 za F.S. + 1 za part. řešení
[1] ... okrajové podmínky -> extremála

[1] ... sestavení Jacobiho rovnice,
[2] ... EXISTUJE konj. bod -> závěr: neex. extrémy

---

3. příklad [9b]

(a) [2.5] ... 1.5 konvergence pro a>1 + 1 divergence pro a<=1

(b) [3] ... 0.5 měřitelnost a spojitost, 2.5 majoranta + odražení

(c) [3.5] ... 2 za Lebesguea + 1.5 za Leviho

---

4. příklad [7b]

(a) [1.5] ... parametrizace podstavy
[1] ... 2d integrál pro výpočet objemu
[1.5] ... goniometrické integrály

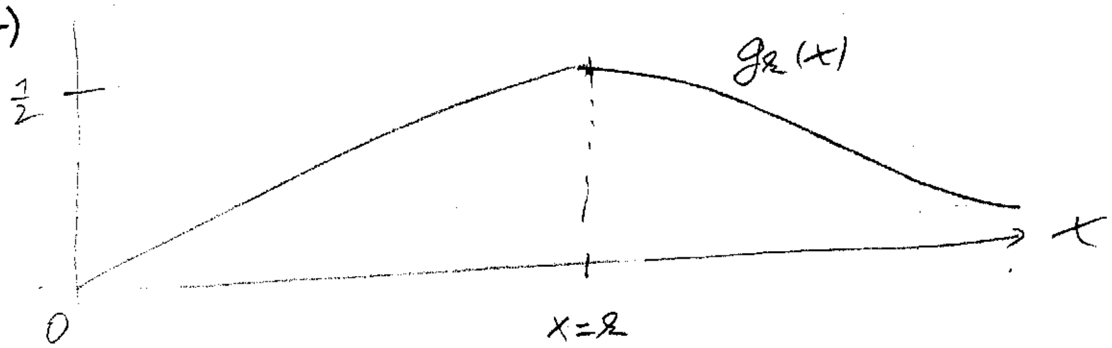
(b) [1.5] ... dolní a horní podstava
[1.5] ... plášť

(1) (a) $f_k(x) = \ln\left(1 + \frac{xk}{x^2+k^2}\right) = \ln\left(1 + g_k(x)\right)$;

$g_k(0) = 0$;

$0 \le g_k(x) \le \frac{xk}{k^2} = \frac{x}{k} \to 0; \quad x > 0$ $\Big\} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \ge 0.$

(b)



(i) $I = [0, K]$; $K > 0$ pevné:

$\sigma_k = \sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in I} \ln(1 + g_k(x)) \le \sup_{x \in I} g_k(x)$;

neboť $\ln(1+y) \le y \quad \forall y \ge 0$

víme: $0 \le g_k(x) \le \frac{x}{k} = \frac{K}{k}$;

tedy: $0 \le \sigma_k \le \frac{K}{k} \to 0$; $\sigma_k \to 0$: ANO

(ii) $I = [K, \infty)$; $K > 0$ pevné: NE:

$\sigma_k = \sup_{x \in I} \ln(1 + g_k(x)) \ge \ln(1 + g_k(k)) = \ln(3/2)$

BÚNO: $k \ge K$

tedy: $\sigma_k \not\to 0$.

(c) jde o stejn. konv. řady $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k(x)$. v $[0,K]$.

Leibniz: (i) $f_k \rightrightarrows 0$ v $[0,K]$ – již víme

(ii) <u>monotonie</u> (stejnoměrná): $\exists k_0\ \forall x \in [0,K]\ \ \{f_k(x)\}_{k=k_0}^{\infty}$ je monotónní.

$\ln(1+y)$ je monotónní (rostoucí) pro $y \in [0,\infty)$.

– stačí monotonie $g_k(x)$: $\frac{\partial}{\partial k} g_k(x) = \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{xk}{x^2+k^2}\right) = \frac{x(x^2-k^2)}{(x^2+k^2)^2}$

$\underline{\leq 0}$ $\forall k \geq k_0 =: K$ $\forall x \in [0,K]$.

závěr: řada konv. stejn. v $[0,K]$;

nekonv. stejn. v $[K,\infty)$ – není splněna nutná podmínka stejn. konv.

(d): NE: pro $x>0$ platí:

$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k f_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$; leč: $f_k(x) \sim g_k(x) \sim \frac{1}{k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

ověření uvedených rovností: $\frac{f_k(x)}{g_k(x)} = \frac{\ln(1+g_k(x))}{g_k(x)} \to 1$; $g_k(x) \to 0$, $>0\ \forall k;\ x>0$

$\frac{g_k(x)}{\frac{1}{k}} = \frac{k^2 x}{k^2+x^2} = \frac{x}{1+\frac{x^2}{k^2}} \to x > 0 \quad \forall x>0.$

(2) $f = r^2 - 4y^2 - x r$

$f_r = 2r - x$

$f_y = -8y$

E.L. $(2y' - x)' + 8y = 0$

$2y'' + 8y = 1$

$y'' + 4y = \frac{1}{2}$

F.S. $\{\sin 2x, \cos 2x\}$

$y_p = A \;..\; A = \frac{1}{8}$.

$y_0 = \frac{1}{8} + a\cdot\cos 2x + b\sin 2x$

$y_0(0) = 1: \quad 1 = \frac{1}{8} + a \;..\; a = \frac{7}{8}$

$y_0\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1: \quad -1 = \frac{1}{8} + a\underbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}_{0} + b\underbrace{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)}_{-1}$

$-1 = \frac{1}{8} - b \qquad \frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$

$b = \frac{9}{8}$.

$$y_{ext} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\cos 2x + \frac{9}{8}\sin 2x$$

Jacobi: $f_{rr} = 2 > 0$ (? lok. min.)

$f_{yy} = -8$

$f_{yr} = 0$

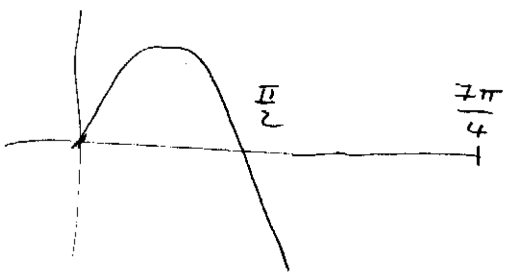
$(2u')' - (-8u) = 0$

$u'' + 4u = 0$

$u = a\cos 2x + b\sin 2x$

$u(0) = 0: \; a = 0$

$u = b\cdot\sin 2x$;



∃ konj. bod. — například: $x = \frac{\pi}{2}$

→ úloha nemá extrém.

(3) (a) $F(a) = \int_1^\infty \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^a}}_{f(a,x)} dx = \int_1^K + \int_K^\infty = I_1 + I_2.$

$f(a,x) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_1 < \infty$ vždy.

$f(a,x) \sim \frac{1}{x^a}$; $x \to \infty$; $(a>0)$ ověřím nejd. rovnosti:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^a} \cdot x^a = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^a}}_{\to 0} + 1} \to \frac{\pi}{2}.$$

tedy: $I_2 < +\infty \iff \underline{a > 1}$.

pro $a \le 0$ $f(a,x) \sim 1$; $x \to \infty$: $I_2 = +\infty$.

$\boxed{\text{Závěr: } I = (1, +\infty).}$

(b) $f(a,\cdot)$ měřitelné $\leftarrow$ spojité
$f(\cdot, x)$ spojité

majoranta: $\sup_{a>1} |f(a,x)| = \sup_{a>1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^a} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \notin L(1,\infty)$

nemůže růst $\underline{a}$ $(x>1)$

omezíme se na
$a \in (1+\delta, \infty)$; $\delta > 0$ pevné.

$$g(x) = \sup_{a>1+\delta} |f(a,x)| = \dots \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^{1+\delta}} \in L(1,\infty)$$

$\therefore F(a)$ spojitá v $(1+\delta, \infty)$; $\delta > 0$ libovolné
$\to$ spojitá v $(1,\infty)$.

(c) $$F(n) = \int_1^\infty \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^n}}_{\to 0 \ \forall x>1} \, dx \xrightarrow{(*)} \int_1^\infty 0 \, dx = 0.$$

ověření (*): Lebesgueova věta: $$|f(n,x)| \le \underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^2}}_{\in L(1,\infty)}; \quad n \ge 2, \ x > 1$$

$$F\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\underbrace{1+x \cdot x^{\frac{1}{n}}}_{g_n}} \, dx \xrightarrow{(*)} \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \, dx = +\infty$$ (viz výše!)

ověření (*): Leviho věta:

$$0 \le g_n < g_{n+1}; \quad \text{neboť} \quad x^{\frac{1}{n}} > x^{\frac{1}{n+1}} \quad (x>1).$$

(4) (a) polární souřadnice: „posunuté": $x = r\cos u$, $y = r\sin u$, $\boxed{J = r}$

$$(x^2+y^2)^3 < 4a^2x^2y^2$$

$$(r^2\cos^2u + r^2\sin^2u)^3 < 4a^2r^2\cos^2u\, r^2\sin^2u$$

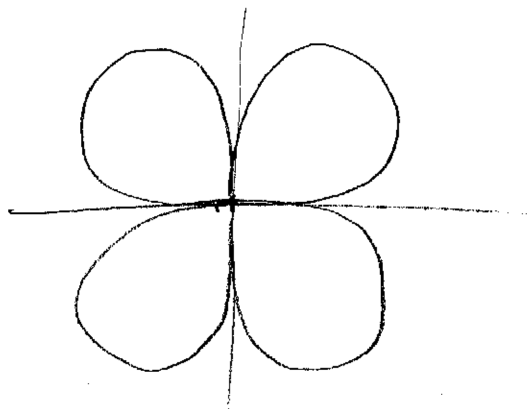
$$r^6 < 4a^2r^4\sin^2u\cos^2u = r^4(a\,2\sin u\cos u)^2$$

$$r < a|\sin 2u|$$

—

$$\lambda_3(\Omega) = \int_P (r^2+1)r\,du\,dr\,;$$

Ω: $u \in (0, 2\pi)$, $r \in (0, a|\sin 2u|)$



$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a|\sin 2u|}(r^3+r)\,dr\right)du$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^4}{4}\sin^4 2u + \frac{a^2}{2}\sin^2 2u\right)du$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{3\pi}{4} + \frac{a^2}{2}\cdot\pi\,.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 2u\,du = \int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 2u\,du = \int_0^{2\pi}\sin^4 t\,dt = \frac{3\pi}{4}$$

(b) : dolní podstava:

$$x = r\cos u \quad ; \quad u \in (0, 2\pi)$$
$$y = r\sin u \qquad r \in (0, a|\sin 2u|).$$
$$z = 0$$

horní podstava: — " —

$$x = r\cos u$$
$$y = r\sin u$$
$$z = 1 + r^2$$

plášť:
$$x = a|\sin 2u|\cos u \qquad u \in (0, 2\pi)$$
$$y = a|\sin 2u|\sin u$$
$$z = v \qquad v \in (0, 1 + a^2\sin^2 2u).$$