**Def.** Množina A se nazve spočetná, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi A a $\mathbb{N}$. Názorně: prvky A lze srovnat do prosté posloupnosti $A=\{a_1, a_2, \dots\}$.

**Příkl.** ① spočetné množiny:

$\mathbb{N}$ .. triviální

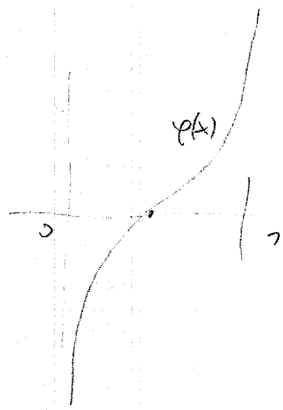
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots$

prvočísla $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

obecně: $A \subset \mathbb{Z}$, A nekonečné $\Rightarrow$ A spočetné.

② $\mathbb{Q}$ je spočetné:

1. krok: $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap (0,1) = \left\{ \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}, \boxed{\frac{1}{4}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{3}{4}}, \right.$
$\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots \frac{k-1}{k},$




2. krok: $\varphi : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{1-|2x-1|}$

$(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ ; vzájemně jednoznačné

$\varphi_{-1} : y \longmapsto \dfrac{y+|y|+1}{2(1+|y|)}$ ; $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \varphi(x) \in \mathbb{Q}$.

tj. $\varphi : \mathbb{Q}_1 \longleftrightarrow \mathbb{Q}$ je 1–1 $\boxed{\text{paradox (Bolzano)}}$

③ A, B .. spočetné $\Rightarrow$ $A \cup B$ .. spočetné,

obecněji $\forall j \in \mathbb{N}$: $A_j$ spoč. $\Rightarrow \bigcup_j A_j$ spoč.

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots$

$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots$

$A_3 = \{a_{31}, a_{32},$

$a_{ij}$ .. j-tý člen i-té množiny.

posloupnost

rozklad: $\mathbb{N} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ ← disj. spočetné ...

**Věta X.1** [Cantor]. $\mathbb{R}$ je nespočetné.

dk.: $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow$ desetinný rozvoj

$$x = 451.2381074\ldots$$

?? $\mathbb{R}$ spočetné: $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \ldots\}$

$$x_1 = \ldots\ldots . \boxed{(\xi_{11})}(\xi_{12})(\xi_{13})\ldots$$

$$x_2 = \ldots\ldots . (\xi_{21})(\xi_{22})$$

obecně $\xi_{ij}$ … j-té pozice za . čísla $x_i$.

definuji:

$$x_0 = 0.(\eta_1)(\eta_2)\ldots \qquad \eta_j = \begin{cases} 1, & \xi_{jj} \neq 1 \\ 2, & \xi_{jj} = 1 \end{cases}$$

(Cantorův diagonální trik).

pak $x_0 \neq x_j \; \forall j$ $\lfloor$SPOR.

(liší se v j-té pozici!!)

---

**Pozn.:** Řekneme, že $A \subset \mathbb{R}$ má mohutnost kontinua, pokud $\exists$ 1-1 zobrazení $A$ na $\mathbb{R}$.

Příkl.: $(0,1)$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ … mají mohutnost kontinua.

Hypotéza kontinua (Cantor, 1878): $A \subset \mathbb{R}$ nekonečné $\Rightarrow$ $A$ spočetné, nebo $A$ má mohu. kontinua.

Gödel, Cohen: HC nelze rozhodnout!!

(co to znamená?!)

Platonismus vs. Formalismus

(realismus vs. nominalismus)

**Def.)** Číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ $(x_0 \in A)$ se nazve <u>algebraické</u>, pokud $\exists$ polynom $p(x)$, $p(x) \neq 0$, s ~~racionálními~~ celými koeficienty tak, že $p(x_0) = 0$.

Číslo, které není algebraické, se nazve transcendentní.

Číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ $(x_0 \in C)$ (computable) se nazve <u>vyčíslitelné</u>, pokud existuje <u>konečný</u> <u>algoritmus</u> (program), který vyčíslí $x_0$ s libovolnou přesností.

---

**Pozn.:** ① $\mathbb{Q} \subsetneq A$ : $x_0 = \frac{m}{n}$ ... kořenem $p(x) = nx - m$

$x_0 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ... kořen $p(x) = x^2 - 2$.

② $\mathbb{Q}$ ... čísla dosažitelná z $\mathbb{N}$ pomocí $+, -, \cdot, :$

$A$ ... —"— —"— $\sqrt[n]{\ }$

$C$ ... čísla, dosažitelná (v limitě) pomocí nějakého algoritmu (konečného).

③ $\pi$, $e$ ... transcendentní (~~Liouville~~ Hermite, Lindemann)
ovšem vyčíslitelná: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$\pi = \dots$

④ ? $\exists x_0 \in \mathbb{R} \setminus C$

---

hierarchie čísel: $\mathbb{N}, +, \cdot$

operace: $-$ : $\mathbb{Z}$

$:$ : $\mathbb{Q}$

$\sqrt[n]{\ }$ : $A$

libovolný konečný algoritmus & limita: $C \stackrel{?}{=} \mathbb{R}$ zdaleka <u>ne</u>.

$K$ ... konstruovatelné: kružítko, pravítko, $\vdash$ (Eukleidovské konstrukce)

- $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq A$
- neřešitelnost: „kvadratura kruhu" (Π·Kesely)

**Lemma X.2** [„Abecední lemma"]. Nechť $Z$ je konečná nebo spočetná množina („abeceda"), nechť $P$ je množina všech **konečných** posloupností z $Z$ („nápisů"). Pak $P$ je spočetná.

---

Dk.: $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$

$P = \{$„$z_1$",

„$z_1 z_1$" „$z_1 z_2$", „$z_2 z_1$" „$z_2 z_2$"

⋮

k-tý krok: nápisy délky k, obsahující $z_1, \dots z_k$

– $k^k$ – členů...

$p =$ „$z_{k_1} \dots z_{k_m}$" .. obecný prvek $P$, najdeme ho v k-tém kroku,

$k = \max\{m, k_1, \dots k_m\}$

---

**Pozn.:** konečné posl.: podstatné.

nekonečné posl.: $P$.. nespočetné ($Z = \{0,1\}$).

(Cantor)

**Důsl.:** $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ .. spočetné.

ad $\mathcal{A}$: $\Pi = \{$polynomy z definice $\mathcal{A}\} \simeq \{$konečné posloupnosti ze $\mathbb{Z}\}$ ← spočetné

↑ spočetné dle L.X.2

$\mathcal{A} = \bigcup_{p \in \Pi} \{x_0 \in \mathbb{R};\ p(x_0) = 0\}$

↑ nejvýše st p prvků

spoč. sjednocení konečných množin.

ad $\mathcal{C}$: algoritmus: konečný nápis $Z = \{ \text{ascii} \ldots \}$

Důsl.: $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C} \neq \emptyset$.

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$

$\neq$ :

nepopsatelné číslo : informace

$x_0 = 321.108781123 \ldots$