Definice. dělení intervalu D: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$;

kde $x_0 = a$, $x_n = b$.

Pro $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezenou fci def.; $i = 1 \dots n$

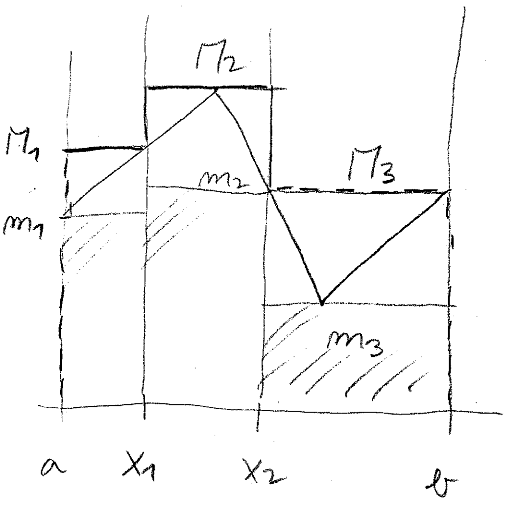
$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

$$M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]).$$

$$s(D) = s(D; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$S(D) = S(D; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

horní resp. dolní Riemannův součet f, příslušný dělení D.



$s(D)$ -- plocha ///

$S(D)$ -- plocha

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \{ s(D; f);\ D \text{ probíhá všechna dělení } [a,b] \}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \{ S(D; f);\ D \text{ probíhá všechna dělení } [a,b] \}$$

$\sigma = \sup M$ - σ je nejmenší horní odhad M

$M \neq \emptyset$, omezená $\Rightarrow$ $\sup M$ vždy existuje.

Definice. Dělení $\tilde{D}$ se nazývá zjemnění dělení D, jestliže $\tilde{D}$ obsahuje všechny body z D. Značíme $D \subset \tilde{D}$.

Lemma: 9.2 Nechť $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce.

(1) Nechť $\tilde{D} \supset D$. Potom
$$s(D) \le s(\tilde{D})$$
$$S(D) \ge S(\tilde{D}).$$

(2) Pro libovolná dělení D_1, D_2 platí $s(D_1) \le S(D_2)$.

~~Věta 9.6~~ Nechť $m \le f(x) \le M$ pro $\forall x \in [a,b]$. Potom

~~Důsledek:~~

Věta 9.1.
$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Definice: Nechť $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Jestliže
$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, pak tato hodnota se nazývá Riemannův integrál $f(x)$ od a do b. Značíme $(R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Říkáme, že $f(x)$ má Riemannův integrál (je Riemannovsky integrovatelná) na $[a,b]$; píšeme $f(x) \in R(a,b)$.

Příklady: ① $(R)\int_a^b x \cdot dx$

② $(R)\int_0^1 D(x)\,dx$ ..

Lemma 9.2. Nechť $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená.

(1) Nechť $D, \tilde{D}$ jsou dělení $[a,b]$.; $D \subset \tilde{D}$. Potom

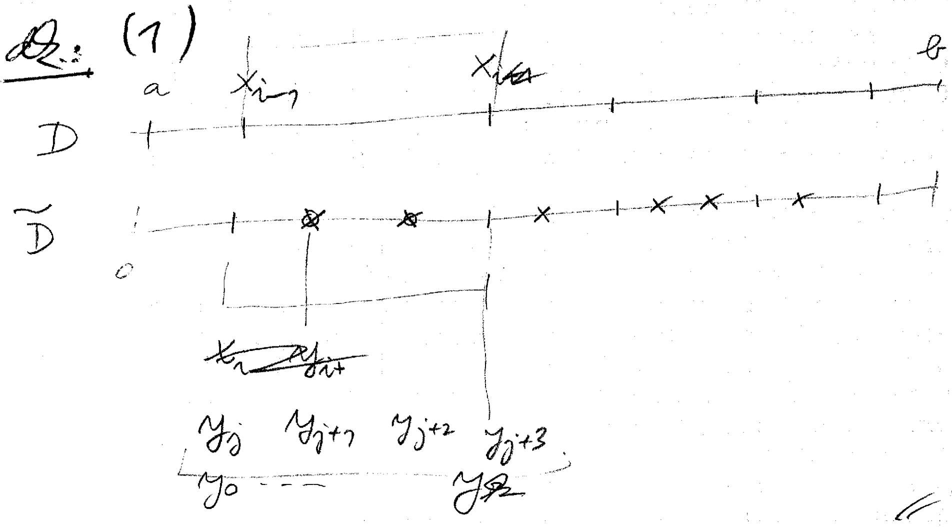
$$s(D,f) \le s(\tilde{D},f)$$
$$S(D,f) \ge S(\tilde{D},f).$$

(2) Nechť $m \le f(x) \le M$ v $[a,b]$. Potom

$$m(b-a) \le s(D_1,f) \le S(D_2,f) \le M(b-a)$$

pro libovolné dělení D_1, D_2.

Dk.: (1)

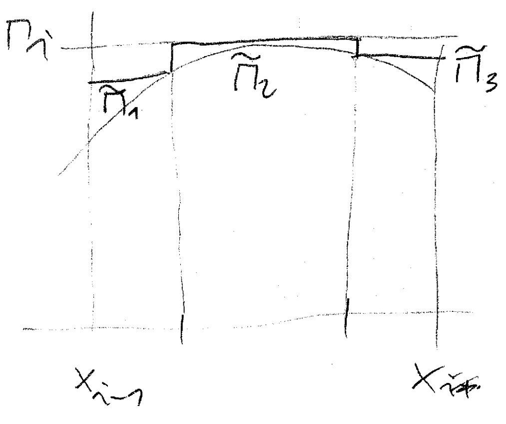


$\sup(f[x_i, x_{i-1}])$

x_i, x_{i+1} -- příspěvek do $S(D,f) = M_i(\cancel{x_{i+1}-x_{i-1}})$.

x_i, x_{i+1} ... příspěvek do $S(\tilde{D},f) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{M}_j (y_j - y_{j-1}) \le$

$\tilde{M}_j = \sup f([y_{j-1}, y_j])$. $\quad \sum_{j=1}^{k} M_i (y_j - y_{j-1})$



klíčové je $\quad = M_i \sum_{j=1}^{k} (y_j - y_{j-1})$

$\tilde{M}_j \le M_i \quad \forall j$. $\quad = M_i(x_{i+1} - x_{i-1})$.

(2) D_1, D_2 -- libovolná dělení

$\tilde{D} = D_1 \cup D_2$ -- společné zjemnění.

$D_0 = (t_0 = a < b)$.

---

(1): $s(D_0) \leq s(D_1) \leq s(\tilde{D})$

$S(D_0) \geq S(D_2) \geq S(\tilde{D})$.

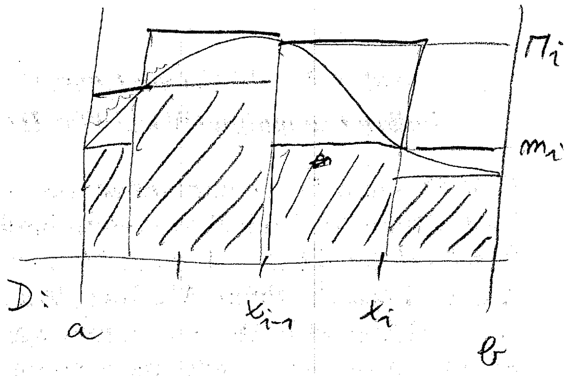
$s(D_0) = \cancel{\sup} \inf f([a,b]) \cdot (b-a) \geq m\,(b-a)$.

$S(D_0) = M\,(b-a)$.

$s(D_0)$

$\underline{m\,(b-a)} \leq s(D_0) \leq \underline{s(D_1)} \leq s(\tilde{D}) \leq S(\tilde{D}) \leq \underline{S(D_2)} \leq \underline{M\,(b-a)}$.

opakování:



$D: x_0 = a < x_1 < \dots x_i < x_n = b$

$m_i := \inf f([x_{i-1}, x_i])$

$M_i := \sup f([x_{i-1}, x_i])$.

$$S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_D s(D,f) \ ; \quad (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_D S(D,f).$$

$$s(D_1,f) \le \boxed{\underline{\int_a^b} \le \overline{\int_a^b}} \le S(D_2,f) \quad \forall D_1, D_2.$$

Def: Pokud $\underline{\int_a^b} = \overline{\int_a^b}$ ... toto číslo nazveme $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ a píšeme $f(x) \in R(a,b)$.

Lemma 9.3: $f(x) \in R(a,b)$ právě když (P.R.).

Lemma 9.4: Nechť $f(x) \in C([a,b])$. Potom platí

$$(\forall \eta > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [a,b])\left[|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta\right]. \quad (S.S.)$$

(tzv. stejnoměrná spojitost.)

Úmluva: $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená

$\int_a^b$; $\underline{\int_a^b}$; $\overline{\int_a^b}$ místo $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ atd.

opakování: Definice...

<u>Lemma 9.3.</u> $f(t) \in R([a,b])$ právě když

(P.R.) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \text{ dělení } D)\left[S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon \right]$.

<u>dk.</u>: víme: $s(D,f) \leq \underline{\int_a^b} \leq \overline{\int_a^b} \leq S(D)$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} - \underline{\int_a^b} \leq \underline{S(D,f) - s(D,f)}.$$

$\uparrow$ dle (P.R.) menší než libovolné $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} - \underline{\int_a^b} = 0 \text{ ; tj. } f \in R([a,b]).$$

---

opačně: $\varepsilon > 0$ dáno: $\frac{\varepsilon}{2} + \overline{\int_a^b} > \overline{\int_a^b} = \inf_D S(D,f)$.

$$\exists D_1 \text{ ; } S(D_1,f) < \overline{\int_a^b} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

podobně: $\frac{\varepsilon}{2} - \underline{\int_a^b} < \underline{\int_a^b} = \sup_D s(D,f)$

$$\exists D_2 \dots \quad s(D_2,f) > \underline{\int_a^b} - \frac{\varepsilon}{2}$$

<u>polož</u>: $D = D_1 \cup D_2$ (společné zjemnění)

L. 9.2.

$$\underline{\int_a^b} - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_2,f) \leq s(D,f) \leq S(D,f)$$

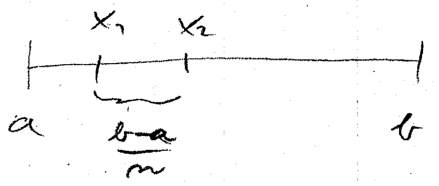
$$\leq S(D_1,f) < \overline{\int_a^b} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S(D,f) - s(D,f) < \overline{\int_a^b} + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{\int_a^b} - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$= \varepsilon + \overline{\int_a^b} - \underline{\int_a^b} = 0 \text{ ; neboť } f \in R(a,b).$$

Věta 9.1: Nechť $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní. Potom $f \in R([a,b])$.

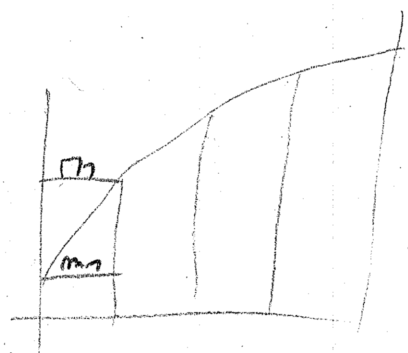
Dk.: $D_n: x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b$;



$$x_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, \dots n.$$

rovnoměrné dělení na n dílů..

BÚNO: $f(x)$ neklesající.



$$M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_i)$$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_{i-1}).$$

$$S(D_n, f) - s(D_n, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left[f(x_1) - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \dots + f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})} \right]$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[f(x_n) - f(x_0) \right] = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

$\varepsilon > 0$ dáno: zvol $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon} < n.$$

$$\Rightarrow S(D_n, f) - s(D_n, f) < \varepsilon.$$

(P.R.) zkus.

$\varepsilon > 0$ dáno: najdi D tak, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$.

n tak, že $S(D_n, f) - s(D_n, f) < \varepsilon$

Lemma 9.4..

$(\forall \eta>0)(\exists \delta>0)(\forall x,y\in[a,b]):[|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon]$.

Sporem: nechť neplatí:

$(\exists \eta>0)(\forall \delta>0)(\exists x,y\in[a,b])[\,|x-y|<\delta \ \&\ |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon]$.

$\eta>0$ fixuji; postupně volím $\delta=\frac{1}{n}$; $n=1,2,\dots$

$\exists x_n, y_n\in[a,b]$; $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$; $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\eta$.

$\{x_n\}\subset[a,b]$ – omezená: $\exists x_0\in[a,b]$; $x_{n_k}\longrightarrow x_0$

Bolzano – Weierstrassova věta V.(7.4.)

$f(x)$ spojitá v bodě x_0: Heineho věta: Věta 7.7.

$f(x_{n_k})\to f(x_0)$. ; $k\to\infty$

$|y_{n_k}-x_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\to 0$; tedy

$$y_{n_k}=x_{n_k}+\underbrace{y_{n_k}-x_{n_k}}_{|\ \ |<\frac{1}{n_k}}\to x_0\ ;\ k\to\infty$$

$f(y_{n_k})\to f(x_0)$. ; $k\to\infty$

$f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\to f(x_0)-f(x_0)=0 \quad k\to\infty$.

spor: $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\eta\ \forall k$.

Lemma: $f(x)\in C([a,b])$. Potom $f(x)$ má vlastnost stejnoměrné spojitosti:

Věta 9.2. Nechť $f(x) \in C([a,b])$. Potom

1. $f(x) \in R(a,b)$
2. Je-li D_n dělení $[a,b]$ na n stejných dílků, pak

$$s(D_n,f) \to (R)\int_a^b f(x)\,dx$$

$$S(D_n,f) \to (R)\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{pro } n\to\infty,$$

$$\mathcal{S}(D_n,f) \to (R)\int_a^b f(x)\,dx;$$

kde $\mathcal{S}(D_n,f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Dk.: 1. Lemma 9.3: stačí ověřit $(\forall \varepsilon>0)(\exists \text{ dělení } D)[S(D,f)-s(D,f)<\varepsilon]$.

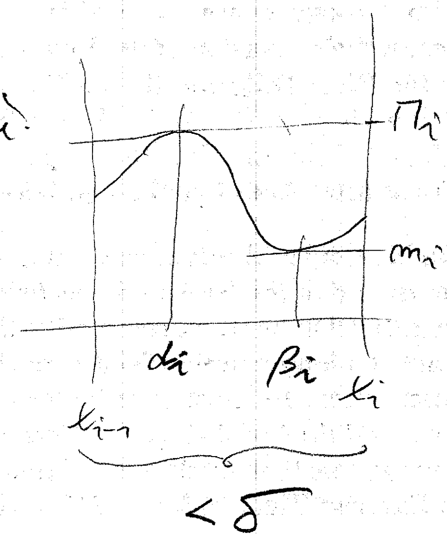
$\varepsilon>0$ dáno: $D_n \dots x_i = a + i\frac{b-a}{n}$; tj. $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

užiji: (S.S.) $\eta = \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\quad \exists \delta>0$; $x,y \in [a,b]$

$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\eta$.

volme: $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{b-a}{n} < \delta$.

co se děje na $[x_{i-1},x_i] =: I_i$ omezený, uzavř.



V.6.3.: nabývání extrémů:

$\exists \alpha_i \in I_i$; $f(\alpha_i) = M_i$

$\exists \beta_i \in I_i$: $f(\beta_i) = m_i$

$|\alpha_i - \beta_i| < \delta \Rightarrow M_i - m_i < \eta$

$$S(D_n,f)-s(D_n,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \eta (x_i - x_{i-1}) = \eta(b-a) < \varepsilon.$$

2. dokázáno: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow S(D_n) - s(D_n) < \varepsilon]$.

neboli $\lim\limits_{n \to \infty} S(D_n, f) - s(D_n, f) \to 0$.

$$s(D_n, f) \leq \underline{\int_a^b} = \overline{\int_a^b} = \int_a^b \leq S(D_n, f).$$

$$\Rightarrow s(D_n, f) \to \int_a^b$$

$$S(D_n, f) \to \int_a^b.$$

$$\mathcal{S}(D_n, f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) \Rightarrow$$

$$m_i \leq f(t_i) \leq M_i$$

$$s(D_n, f) \leq \mathcal{S}(D_n, f) \leq S(D_n, f).$$

Věta o dvou policajtech: $\mathcal{S}(D_n, f) \to \int_a^b$.

<u>Pozn.</u>: Část 2. věty platí pro $\forall f(x) \in R(a,b)$.

dokonce obecněji:

Věta 9.3. [Linearita pro R.i.]

1. Nechť $f(x), g(x) \in C([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom

a platí
$$(R)\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\,(R)\int_a^b f(x)\,dx + \beta\,(R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Nechť $c \in (a,b)$. Potom $f(x) \in R(a,b)$ právě když $f(x) \in R(a,c)$ a zároveň $f(x) \in R(c,b)$. Navíc platí:
$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Dk: $f(x), g(x)$ spojité $\Rightarrow$ $\alpha f(x) + \beta g(x)$ spojitá (Věta 2.14.)
$\in R(a,b)$ (Věta 9.1)

D_n … rovnoměrné dělení; $h(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$.

$$S(D_n, \alpha f(x)+\beta g(x)) = \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$(R)\int_a^b \alpha f + \beta g \quad \leftarrow \quad = \sum_{i=1}^{n} [\alpha f(t_i) + \beta g(t_i)](x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \beta g(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha\, S(D_n, f(x)) + \beta\, S(D_n, g(x)).$$

$n \to \infty$: Věta 9.1. $\qquad \downarrow \alpha\,(R)\int_a^b f \qquad \downarrow \beta\,(R)\int_a^b g$

Pozn. Věta platí za předpokladu $f, g \in R(a,b)$.
(težší důkaz)

Věta 9.4 [Intervalová aditivita pro R.i.].

1. Nechť f je omezená v $[a,b]$; $c \in (a,b)$. Potom

$$\underline{\int_a^b} = \underline{\int_a^c} + \underline{\int_c^b}\ ; \qquad \overline{\int_a^b} = \overline{\int_a^c} + \overline{\int_c^b}.$$

2. Dále: $f(x) \in R(a,b)$ právě když $f(x) \in R(a,c)$ a zároveň $f(x) \in R(c,b)$.

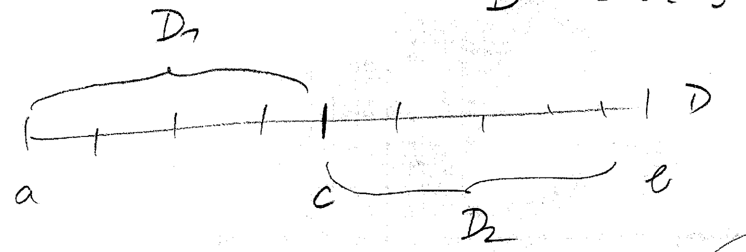
Za všech předpokladů platí:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Dk.: 1. (dolní int.) D libovolné dělení $[a,b]$;

$$\tilde{D} = D \cup \{c\} = D_1 \cup D_2$$

dělení $[a,c]$; resp. $[c,b]$



$$\underline{s(D,f)} \underset{L.9.2}{\le} s(\tilde{D},f) = s(D_1,f) + s(D_2,f) \underset{L.9.2}{\le} \underline{\int_a^c} + \underline{\int_c^b}$$

tj.: $s(D,f) \le \underline{\int_a^c} + \underline{\int_c^b} \quad \forall D, \ \sup_D$

$$\underline{\int_a^b} \le \underline{\int_a^c} + \underline{\int_c^b}.$$

zpět: D_1, D_2 .. libovolné dělení $[a,c]$, $[c,b]$.

$D = D_1 \cup D_2$ .. dělení $[a,b]$.

$$s(D_1,f) + s(D_2,f) = s(D,f) \underset{L.9.2}{\le} \underline{\int_a^b}$$

$$s(D_1,f) \le \int_{\underline{a}}^{b} - s(D_2,f) \qquad \Big/ \sup_{D_1}$$

$$\int_{\underline{a}}^{c} \le \int_{\underline{a}}^{b} - s(D_2,f)$$

$$s(D_2,f) \le \int_{\underline{a}}^{b} - \int_{\underline{a}}^{c} \qquad \Big/ \sup_{D_2}$$

$$\int_{\underline{c}}^{b} \le \int_{\underline{a}}^{b} - \int_{\underline{d}}^{c} \dots$$

$$\int_{\underline{a}}^{c} + \int_{\underline{c}}^{b} \le \int_{\underline{a}}^{b}.$$

speciálně: $f(x) \in R(a,b)$; $[c,d] \subset [a,b] \Rightarrow f(x) \in R(c,d)$.

2. dle (1):

$$\int_{\underline{a}}^{c} + \int_{\underline{c}}^{b} = \int_{\underline{a}}^{b}$$

$$\int_{a}^{\overline{c}} + \int_{c}^{\overline{b}} = \int_{a}^{\overline{b}}$$

$$\left(\int_{a}^{\overline{b}} - \int_{\underline{a}}^{b}\right) + \left(\int_{c}^{\overline{b}} - \int_{\underline{c}}^{b}\right) = \int_{a}^{\overline{b}} - \int_{\underline{a}}^{b}.$$

$f(x) \in R(a,b) \Leftrightarrow (PS) = 0$

$\Leftrightarrow (LS) = 0$; (LS) = součet dvou nezáporných čísel. (L. 9.2).

$\Leftrightarrow$ (LS)

$\Leftrightarrow$ obě ( ) a ( ) ~~zvlášť~~ ≥ 0

$\Leftrightarrow f \in R(a,c)$ & $f \in R(c,b)$.

Dodatek k definici R.i.: Pro $b < a$ klademe

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx := -(R)\int_b^a f(x)\,dx,$$ má-li P.S. smysl.

Dále klademe $(R)\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Pozn.: Věta 9.4. platí obecně: $f(x) \in R\langle\alpha,\beta\rangle$; $a,b,c \in [\alpha,\beta]$ libovolné je

$$(R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dk.: $a < c < b$ .. Věta 9.4.

$a < c = b$: $$\int_a^c + \underbrace{\int_c^b}_{=0} = \int_a^b + 0.$$

$a < b < c$:

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b + \int_b^c - \int_b^c = \int_a^b.$$

V. 9.4.

Věta 9.5. [Monotonie R.i.]

1. Pokud $f(x), \tilde{f}(x) \in R(a,b)$; a $f(x) \le \tilde{f}(x)$ pro $\forall x \in [a,b]$, je
$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \le (R)\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$$

Speciálně: $f \ge 0 \Rightarrow (R)\int_a^b f \ge 0$

2. Pokud $f(x), |f(x)| \in R(a,b)$, je $\left|(R)\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (R)\int_a^b |f(x)|\,dx$.

---

dk.: D libovolné dělení; $m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i])$
$$\tilde{m}_i = \inf \tilde{f}([x_{i-1}, x_i]).$$

Stačí zvolit porovnání: $m_i \le \tilde{m}_i$.

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \tilde{m}_i (x_i - x_{i-1}) = s(D,\tilde{f}).$$

$$s(D,f) \le s(D,\tilde{f}) \le \underline{\int_a^b} \tilde{f}. \quad \Big/ \sup_D$$

$$\underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} \tilde{f}. \quad \text{je tedy buď} = \text{nebo } \boxed{<}$$

$f, \tilde{f} \in R(a,b)$: $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f}$.

---

2. trik: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$; část 1.

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f| \qquad |x| \le y \Leftrightarrow -y \le x \le y.$$

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Věta 9.6. [R. i. poměry dle horní meze.]

Nechť $f(x)$ je omezená v $[a,b]$ a $f(x) \in R(a,b)$. Nechť $c \in [a,b]$.

Označme $F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt$; $x \in [a,b]$.

Potom: (1. $F(x)$ je spojitá v $[a,b]$

(2.) $F'(x) = f(x)$ v každém bodě $x \in (a,b)$, ve kterém je $f(x)$ spojitá.

---

dk.: (1) $|f(x)| \le M$; $\forall x \in [a,b] = I$

$$|F(x) - F(y)| = \underbrace{(R)\int_c^x f(t)\,dt}_{\int_c^y + \int_y^x} - (R)\int_c^y f(t)\,dt = (R)\int_y^x f(t)\,dt$$

$$|F(x) - F(y)| = \left|(R)\int_y^x f(t)\,dt\right| \le M \cdot |x-y|.$$

$|f(t)| \le M \ \forall t$

chci spojitost: $(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in U(x_0,\delta) \cap I \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right]$.

$x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ dáno: polož $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

$x \in U(x_0,\delta)$.. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$\underline{|F(x) - F(x_0)|} \le M \cdot |x - x_0| < M \cdot \delta \underline{= \varepsilon}$$

(2) $x_0 \in (a,b)$; $f(x)$ spojitá v x_0. cíl: $F'(x_0) = f(x_0)$.

$$\frac{1}{h}\left[F(x_0+h) - F(x_0)\right] = \frac{1}{h}\left[\underbrace{\int_c^{x_0+h}}_{\int_c^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+h}} - \int_c^{x_0}\right] = \frac{1}{h}(R)\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

$\pm f(x_0)$

$$= \frac{1}{h}(R)\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) + f(t) - f(x_0)\,dt = \underbrace{\frac{1}{h}(R)\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt}_{=f(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{h}(R)\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt}_{R(h)}$$

stačí: $R(h)\to 0$ pro $h\to 0$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[0<|h|<\delta \Rightarrow |R(h)|<\varepsilon\right].$$

$\varepsilon>0$ dáno: $f(x)$ spojitá v x_0: $\exists \delta>0 \,..\, t\in P(x_0,\delta) \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$.

nechť $0<|h|<\delta$: potom $t\in P(x_0,\delta)$ pro $\forall t\in[x_0;x_0+h]$

$$|R(h)| \le \frac{1}{|h|}(R)\int_{x_0}^{x_0+h}\underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{<\varepsilon}\,dt \le \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot|h| = \varepsilon$$

Důsledek. Nechť $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(x)$ má v (a,b) primitivní funkci.

dk.: zvol $c\in(a,b)$ libovolně; polož $F(x)=(R)\int_c^x f(t)\,dt$. $\forall x\in(a,b)$

– integrál má smysl: $f(x)$ spojitá na $[c,x]$ ($[x;c]$)
Věta 9.8

– analogicky jako ve V. 9.10 dokáži $F'(x)=f(x)$ pro $\forall x\in(a,b)$.

Poznámka. $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ dána. ? má $f(x)$ v (a,b) PF ?

„teoretický" přístup: ANO, je-li spojitá
NE, nemá-li Darbouxovu vlastnost (V. 6.7)

„praktický" přístup: umím PF napsat vzorcem? (problém kapitoly 5)
– zdaleka ne vždy;

$f(x)=e^{-x^2}$
má jistě PF (je spojitá..)
tato PF se nedá zapsat pomocí elementárních funkcí.

Věta 9.7. [Vztah N.i. a R.i.] Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a,b]$.

Potom $f(x) \in N(a,b)$ a platí $(N)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx$.

dk: pro $x \in [a,b]$ položme $F(x) = (R)\int_a^x f(t)dt$

neboť f spojitá v $[a,x]$.

Věta 9.9. $\Rightarrow$ $F(x)$ spojitá v $[a,b]$

$F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$.

tj. $F(x)$ je PF k $f(x)$ v (a,b).

$$(N)\int_a^b f(x)dx = F(b-) - F(a+) \underset{\substack{\uparrow \\ F(x) \text{ spojitá v } [a,b]}}{=} F(b) - F(a) = (R)\int_a^b f(t)dt - \underbrace{(R)\int_a^a f(t)dt}_{=0}$$

Poznámka. Rekapitulace.

Newtonův i.
+ snadný výpočet z definice
+ zvládne neomezené funkce a intervaly
− stojí na složitém pojmu (PF .. definice 10. listopadu)
− názorný význam: není vůbec jasné z definice.
(genialita

Riemannův i.
+ definice elementární (sup .. 5. října)
− takřka nelze počítat z definice
− jen omezené funkce na om. intervalu
+ názorný význam: se snadno zdůvodní (viz výše).