7. Posloupnosti

Definice. Posloupnost je zobrazení $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přičemž značíme $a(n) = a_n$.
A celou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nebo $\{a_n\}$.

Příklady: (1) $a_n = \frac{1}{n}$; $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $c_n = \frac{n^n}{n!}$; $(-1)^n$ nemá limitu.

(2) $a_1 = 0$; $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ (rekurentně zadané).

$a_1 = a_2 = 1$; $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ .. (Fibonacci)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limita posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left[n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}(a,\varepsilon)\right].$$

Značíme $a_n \to a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Terminologie: $\{a_n\}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$ – říkáme, že $\{a_n\}$ konverguje, (je konvergentní).

$a_n \to \infty$, $a_n \to -\infty$: a_n diverguje do $+\infty$, $-\infty$

$\{a_n\}$ nemá limitu: osciluje.

Poznámky: $a_n \to a \in \mathbb{R}$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\left[n\ge n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right]$.

$a_n \to \infty$: $(\forall K>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left[n \ge n_0 \Rightarrow a_n > K\right]$

Věta 7.1 [Aritmetika limit]. Nechť $\{a_n\}$, ~~$\{b_n\}$~~ jsou posloupnosti, kde $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Potom
(1) $a_n \pm b_n \to a \pm b$
(2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
(3) $a_n / b_n \to a/b$, má-li pravá strana smysl.

Dk: vynecháváme; analogicky Větám 2.3, 2.7.

Příklady: (1) $a_n = \frac{1}{n}$; ukážeme: $\frac{1}{n} \to 0$.

$\varepsilon > 0$ dáno: zvol $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$\Rightarrow a_n \in \mathcal{U}(0,\varepsilon)$..

(2) $a_n = (-1)^n$; $-1, 1, -1, 1, \ldots$

Věta 7.1 Konvergentní posloupnost je omezená.

Dk.: $\{a_n\}$ konv.: tj.: $a_n \to a$; $a \in \mathbb{R}$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} .. \ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1 \quad (\varepsilon = 1)$$

$$a-1 < a_n < a+1$$

$$|a_n| \leq \tilde{K}; \text{ pro } \forall n \geq n_0$$

$$\tilde{K} = \max\{|a-1|, |a+1|\}.$$

polož $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots |a_{n_0}|, \tilde{K}\}$.

pak: $|a_n| \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 7.2. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Pak má limitu; je-li navíc $\{a_n\}$ omezená, tak limita je vlastní (tj. $\{a_n\}$ konverguje.)

dk. BÚNO: a_n neklesající; označ: $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(α) M shora neomezená: ukážeme, že $a_n \to \infty$.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K].$$

$K > 0$ dáno. M shora neomezená: $\exists a_{n_0} \in M$; $a_{n_0} > K$

a tedy: $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \underset{\{a_n\} \text{ neklesající}}{\geq} a_{n_0} > K$.

(β) M shora omezená: Věta A4: $\exists a \in \mathbb{R}$ takové, že $a = \sup M$.

ukážeme: $a_n \to a$.

$\varepsilon > 0$ dáno: $a - \varepsilon < a$ .. vlastnost suprema:

$$\exists a_{n_0} \in M; \ a_{n_0} > a - \varepsilon$$

$$n \geq n_0: \quad a_n \geq a_{n_0} > a - \varepsilon$$

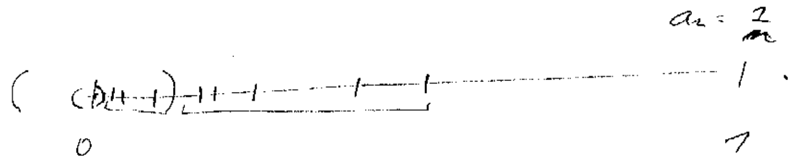
omezení shora $a_n \leq a$

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$$

$$a_n \in U(a, \varepsilon).$$

$\{a_n\}$ omezená $\Rightarrow$ nastává (β)
$\to$ limita je vlastní.

ekvivalentně: $\forall \varepsilon > 0$: $a_n \in U(a, \varepsilon)$ až na konečně výjimek



Poznámky: Platí věty:

(i) $$\left.\begin{array}{l} a_n \to a, \\ b_n \to b, \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a_n + b_n \to a + b \\ a_n \cdot b_n \to a \cdot b \\ a_n / b_n \to a/b \end{array}$$ má-li výraz vůbec smysl. (srovnej V. 2.3, 2.7).

(ii) $$\left.\begin{array}{l} \alpha \le a_n \le \beta \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N}; \\ \text{a zároveň: } a_n \to a \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \le a \le \beta.$$ (Věta 2.9)

(iii) $$\left.\begin{array}{l} b_n \le a_n \le c_n \quad \text{pro } \forall n \\ \text{a zároveň: } b_n \to a \\ \qquad\qquad\quad c_n \to a \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \to a$$ (O dvou policajtech: V. 2.10.)

(iv) $a_n \to 0$; $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$ (V. 2.4.)

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$ se nazve omezená, jestliže $\exists K > 0$ tak, že $|a_n| \le K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost se nazve $$\left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{klesající} \end{array}\right\}, \text{ jestliže } \left\{\begin{array}{l} a_n < a_{n+1} \\ a_n \le a_{n+1} \\ a_n \ge a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \end{array}\right\} \text{ pro } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Souhrnně: monotónní.

. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazveme hromadným počtem / bodem, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ platí $a_n \in \mathcal{U}(a, \varepsilon)$ pro nekonečně mnoho n.
jen

Poznámky • $a_n = (-1)^n$ má dva hromadné body: $-1, 1$.

• $\sin n$ ... $[-1, 1]$ ... ještě $a_n \in \mathcal{U}(1, \varepsilon)$ pro $\forall n$ malé:

• $a_n \to a \Rightarrow a$ je $\underbrace{\text{hromadný bod}}_{\text{jediný}}$ $\{a_n\}$. (d.cv.)

Definice. Je dána posloupnost $\{a_n\}$. Řekneme, že $\{b_n\}$ je podposloupnost $\{a_n\}$ (posloupnost vybraná z $\{a_n\}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $b_n = a_{k_n}$.

$$\begin{array}{llllll} a: & a_1 & a_2 & \cancel{a_3} & a_4 & a_5 \\ & \| & & & \| & \| \\ b: & b_1 & & & b_2 & b_3 \end{array} \quad ; \quad k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ k_3 = 5 \ldots$$

Věta 7.3. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $\{a_n\}$, právě když $\{a_n\}$ má podposloupnost, jejíž limita je a.

Dk: 1. krok: „$\Rightarrow$": a hromadný bod $\{a_n\}$

cíl: najdu $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ tak, že

$a_{k_n} \to a$.

$a_k \in \mathcal{U}(a, 1)$ pro nekonečně $k \Rightarrow \exists\, k_1;\ a_{k_1} \in \mathcal{U}(a, 1)$.

$a_k \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{2})$ pro nekonečně $k \Rightarrow \exists\, k_2$; navíc $k_2 > k_1$ tak, že

$a_{k_2} \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{2})$.

⋮

indukcí: $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ máme.

$a_k \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{n})$ pro nekonečně $k \Rightarrow \exists\, k_n$; $k_n > \max\{k_1, k_2, \ldots k_{n-1}\}$

$\boxed{a_{k_n} \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{n})}$

? $a_{k_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$: $\varepsilon > 0$ dáno: zvol. $n_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ..

$n \geq n_0 \Rightarrow a_{k_n} \in \mathcal{U}(a, \frac{1}{n}) \subset \mathcal{U}(a, \frac{1}{n_0}) \subset \mathcal{U}(a, \varepsilon)$.

2. krok: „[illegible]" [illegible] $k_1 < k_2 < \dots < k_n$

$a_{k_n} \to a$: cíl: a je hromadný bod:

$\varepsilon > 0$ dáno libovolně: $\exists n_0$: $a_{k_n} \in U(a,\varepsilon)$ pro $\forall n \geq n_0$

tedy $a_k \in U(a,\varepsilon)$ pro $\forall k \in \{k_{n_0}, k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, \dots\}$

$\uparrow$ nekonečná množina...

Věta 7.4. (Bolzano–Weierstrass) Nechť $\{a_n\}$ je omezená. Potom $\{a_n\}$ má konvergentní podposloupnost.

dk.: podle V. 7.3: ekvivalentně: $\{a_n\}$ má hromadný bod v $\mathbb{R}$.

polož $M = \{\alpha \in \mathbb{R} : a_n > \alpha \text{ pro nekonečně } n\}$.

$M \neq \emptyset$: $\{a_n\}$ omezená; tj. $\exists K > 0$: $-K \leq a_n \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

$-K-1 \in M$: $a_n > -K-1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

[illegible]: K je horní odhad M:

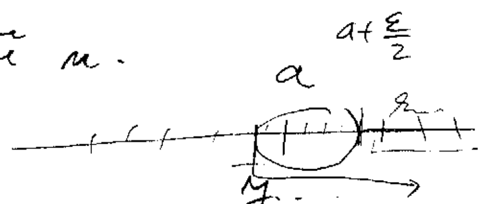
$\alpha \in M$: $\exists a_n$; $a_n > \alpha$. Ale: $a_n \leq K$

$\alpha < a_n \leq K$.

Věta A4: $\exists a \in \mathbb{R}$; $a = \sup M$.

Tvrdíme: a je hromadný bod $\{a_n\}$.

$\varepsilon > 0$ dáno: cíl: $a_m \in U(a,\varepsilon)$ pro nekonečně n.



$a + \frac{\varepsilon}{2} > a = \sup M \Rightarrow a + \frac{\varepsilon}{2} \notin M$. tedy

$a_n \leq a + \frac{\varepsilon}{2}$ až na konečně výjimek.

$a - \varepsilon < a = \sup M$ – 2. vlastnost suprema.

$\exists y \in (a-\varepsilon, a]$; $y \in M$:

$a_n > y$ pro nekonečně n.

$\Rightarrow a_n \in (y, a + \frac{\varepsilon}{2}]$ pro nekonečně n

Definice. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence (krátce: $\{a_n\}$ je cauchyovská), jestliže

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\left[m,n\geq n_0 \Rightarrow |a_m-a_n|<\varepsilon\right]. \qquad (B.C.)$$

Věta 7.5 Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\{a_n\}$ konverguje

(2) $\{a_n\}$ splňuje B.C. podmínku.

---

dk.: $(1)\Rightarrow(2)$: nechť $\{a_n\}$ konverguje; tj. $a_n\to a$, kde $a\in\mathbb{R}$.

cíl: (B.C.)

$\varepsilon>0$ dáno: protože $a_n\to a$: $\exists n_0$: $\forall n\geq n_0$: $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$m,n\geq n_0$ libovolné: $|a_m-a_n|=|(a_m-a)-(a_n-a)|$

$$\leq |a_m-a|+|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$(2)\Rightarrow(1)$: platí B.C.: cíl: $\exists a\in\mathbb{R}$ takové, že $a_n\to a$.

1. krok: $\{a_n\}$ je omezená: (B.C.) s $\varepsilon=1$:

$\exists n_0$: $\forall m,n\geq n_0$: $|a_m-a_n|<1$

speciálně $|a_n-a_{n_0}|<1$

pro $n\geq n_0$: $a_{n_0}-1<a_n<a_{n_0}+1$

$K=\max\{|a_{n_0}-1|,|a_{n_0}+1|\}$.

$\Rightarrow |a_n|\leq K$ pro $\forall n\geq n_0$.

2. krok. Věta 7.4: $\exists a\in\mathbb{R}$; a hromadný bod $\{a_n\}$.

3. krok: ukážeme, že $a_n\to a$.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\left[n\geq n_0\Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon\right].$$

$\varepsilon > 0$ dané: (B.C.) s $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (+)$$

a .. hromadný bod $\{a_n\}$.. $\mathcal{U}(a, \frac{\varepsilon}{2}) \ni a_n$ pro nekonečně n.

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N};\ m \geq n_0;\ a_m \in \mathcal{U}(a, \tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$n \geq n_0: \quad |a_n - a| = |(a_n - a_m) + (a_m - a)|$$

$$\leq \underbrace{|a_n - a_m|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{dle } (+)}} + \underbrace{|a_m - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Poznámka: často je důležitější, zda $\{a_n\}$ konverguje, nebo ne. konkrétní hodnota limity nás nezajímá..

$\rightarrow$ užitečnost (B.C.) podmínky.

Poznámka: Věta A4: M neprázdná, shora omezená $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}$, $S = \sup M$

Věta 7.2: $\{a_n\}$ omezená, monotónní $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R};\ a_n \to a$

Věta 7.4: $\{a_n\}$ omezená $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$, a je hromadný bod $\{a_n\}$.

pro nás: Věta A4 = axiom; V. 7.2, V. 7.4 = důsledky

logicky vzato: jsou tyto výroky ekvivalentní:

tj. z Věty 7.4. lze odvodit V. A4, V. 7.2.

Věta 7.6. [Heine.] Nechť $f(x)$ je definována na $P(x_0, \dots)$. Potom je ekvivalentní:

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující (i) $x_n \to x_0$, (ii) $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$

platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A.

dk: (1) $\Rightarrow$ (2): víme $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)\right]$ (*)

a nechť posloupnost $\{x_n\}$ splňuje (i), (ii)

cíl: $f(x_n) \to A$

neboli: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left[n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U(A, \varepsilon)\right]$.

$\varepsilon > 0$ dáno, dle (*) $\exists \delta > 0 \dots f(P(x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon)$

(i) $x_n \to x_0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $x_n \in U(x_0, \delta)$ pro $n \geq n_0$

(ii): $x_n \neq x_0$ $\Rightarrow$ $x_n \in P(x_0, \delta)$ pro $\forall n \geq n_0$.

$f(x_n) \in U(A, \varepsilon)$ pro $\forall n \geq n_0$.

$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$: nechť neplatí $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)\left[f(P(x_0, \delta)) \not\subset U(A, \varepsilon)\right.$$

$$\left.\exists x \in P(x_0, \delta) \text{ tak, že } f(x) \notin U(A, \varepsilon)\right].$$

takové $\varepsilon > 0$ fixuji: $(\forall \delta > 0)(\exists x \in P(x_0, \delta))$; $f(x) \notin U(A, \varepsilon)$.

užiji: $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x = x_n \in P(x_0, \frac{1}{n})$, $f(x_n) \notin U(A, \varepsilon)$.

$\{x_n\}$ splňuje (i), (ii).

leč: $f(x_n) \not\to A$

tedy (2) neplatí.

Věta 4.1. Nechť $f(x)$ je definována v intervalu I. Pak je ekvivalentní:

(1) $f(x)$ je spojitá v I

(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující (i) $x_n \to x_0$

(ii) $x_0 \in I$; $x_n \in I$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

platí, že $\{f(x_n)\}$ má limitu $f(x_0)$.

Dk: $(1) \Rightarrow (2)$: platí (1): $(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[f(\mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I) \subset \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon) \right]$ (*)

nechť $\{x_n\}$ splňuje (i), (ii)

cíl: $f(x_n) \to f(x_0)$.

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists\, \delta > 0$ tak, že pro něj (*) platí:

$x_n \to x_0$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$

(ii): $x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I$

$\Rightarrow f(x_n) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$.

$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$: neplatí (1): $(\exists\, x_0 \in I)(\exists\, \varepsilon > 0) \,|\, (\forall \delta > 0)\left[f(\mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I) \not\subset \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon) \right]$.

taková $x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ fixuji:

užiji výrok o $\delta = \frac{1}{n} \cdots \exists\, x = x_n \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I$;

tak, že $f(x_n) \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$.

(i), (ii) splněny, leč

$f(x_n) \not\to f(x_0)$:

Poznámka: • $f(x)$ spojitá v x_0 právě když

pro každou $\{x_n\}$, splňující $x_n \to x_0$, platí $f(x_n) \to f(x_0)$.

Příklady: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

$a_n = f(x_n)$; $\quad x_n = n$

$f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$;

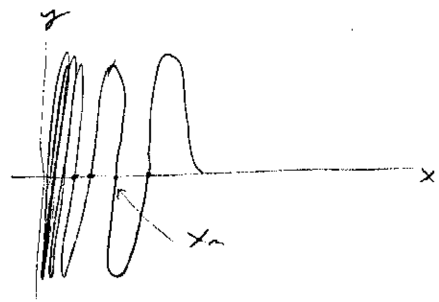
$f(x)$ – def. na $P(\infty)$;

$x_n \to \infty$; ale $x_n \neq \infty$ pro $\forall n$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0+} \exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{y}\ln(1+y)}_{\to 1}\Big) = e^1$$

Heine: $a_n = f(x_n) \to e$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.



Sporem: nechť tato limita je A.

$x_n = \frac{1}{\pi n} \to 0$; $x_n > 0$ pro $\forall n$.

Heine: $f(x_n) \to A$; leč: $f(x_n) = \sin(\pi n) = 0$.

tedy $A = 0$.

prot: $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$; opět $x_n \to 0$;
$x_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$f(x_n) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \to A$$

tedy $A = 1$. spor.

Důsledek: $\lim\limits_{y\to\infty} \sin y$ neexistuje.

Pozn.: • jednostranné verze: je ekvivalentní

(1) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$

(2) jestliže $\{x_n\}$ splňuje (i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

pak $f(x_n) \to A$.