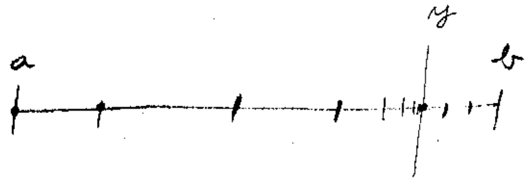
2. [illegible]

„[illegible]?
-- Na pomdu." (Hofmannsthal)

$S = \sup M$ ... (i) $\forall x \in M \; [x \leq S]$
(ii) $(\forall S' < S)(\exists y \in M)\,[y > S']$

Věta A4: $M \subset \mathbb{R}$ neprázdné, shora omezené $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup M$.

Lemma 6.1 (Plíživé lemma) Nechť $M \subset [a,b]$ má následující tři vlastnosti:
(i) $a \in M$ (ii) $x_0 \in M$ a $x_0 < b \Rightarrow \exists x_1 \in M$ tak, že $x_1 > x_0$
(iii) má-li $y \in (a,b]$ tu vlastnost, že pro $\forall \delta > 0$ obsahuje $\mathcal{U}_-(y,\delta)$ bod z M,
pak také $y \in M$.



Tvrdíme, že (i), (ii) a (iii) implikují $b \in M$.

$y \in M$ dle (iii)

Pěkné cvičení!!

Dk: $M \neq \emptyset$ $(a \in M)$; shora omezené (číslem b)
V. A4 $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup M$. ; zjevně $S \in [a,b]$.

1. krok: tvrdíme, že $S \in M$: stačí ověřit, že S má vlastnost z bodu (iii)

$\delta > 0$ dáno: $S - \delta < S$. vlastnost (ii) suprema:
$\exists z \in M$; $z > S - \delta$; leč také $z \leq S$
tedy $z \in M \cap \underbrace{(S-\delta, S]}_{= \mathcal{U}_-(S,\delta)}$.

dle (iii): $S \in M$.

2. krok: tedy $S \in M$; a $S = \sup M$ .. tedy S je největší prvek M.
tvrdíme, že $S = b$: sporem: $S < b$ .. dle (ii) $\exists x_1 \in M$; $x_1 > S$
spor s vlastností (i) suprema.

---

poznámka: (iii) má-li $y \in (a,b]$ vlastnost
(*) $(\forall \delta > 0)(\exists z \in M \cap \mathcal{U}_-(y,\delta))$
pak též $y \in M$.

$f(x)$ je omezená na M : $(\exists K > 0)(\forall x \in M)\,\big[\,|f(x)| \leq K\,\big]$.

Lemma 2.1.
Lemma 6.1. $f(x)$ spojitá v x_0 (resp. spojitá zleva, resp. zprava).
Pak $f(x)$ je omezená na jistém $\mathcal{U}(x_0)$ (resp. $\mathcal{U}_+(x_0)$ resp. $\mathcal{U}_-(x_0)$).

Věta 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I.
Potom $f(x)$ je na I omezená.

Dk. $I = [a, b]$. Označ $M = \{y \in [a,b];\ f(x) \text{ je omezená na } [a,y]\}$.

ověříme, že M splní (i), (ii), (iii) Lem. 6.1. ; odtud $b \in M$ .. závěr.

(i) $a \in M$; tj. $f(x)$ omezená na $[a,a] = \{a\}$. zjevné.

položíš $K = |f(a)|$. pak $|f(x)| \le K$ pro $\forall x \in [a,a] = \{a\}$.

(ii) $x_0 \in M$; $x_0 < b \overset{?}{\Rightarrow} \exists x_1 \in M$; $x_1 > x_0$.

$x_0 \in M$ ... $f(x)$ omezená na $[a, x_0]$ tj. $\exists K_1 > 0$ tak, že

$|f(x)| \le K_1$ pro $\forall x \in [a, x_0]$.

$x_0 < b$; V.2.13. $\Rightarrow$ $f(x)$ spojitá v x_0 zprava ; tedy

L.6.2. $\Rightarrow$ $f(x)$ omezená na jistém $\mathcal{U}_+(x_0, \delta)$

tj.: $\exists K_2 > 0$ tak, že $|f(x)| \le K_2$ pro $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$

polož: $x_1 = x_0 + \frac{\delta}{2}$; $K = \max\{K_1, K_2\}$.

.. $x \in [a, x_1] \Rightarrow |f(x)| \le K$

tj.: $x_1 \in M$.

(iii) cíl: $y \in (a,b]$ splní: $(\forall \delta > 0)$ je $M \cap \mathcal{U}_-(y,\delta) \ne \emptyset$. $\overset{?}{\Rightarrow} y \in M$.

$y \in (a,b]$ dáno: y není levý krajní ; tj. $f(x)$ spojitá v y zleva.

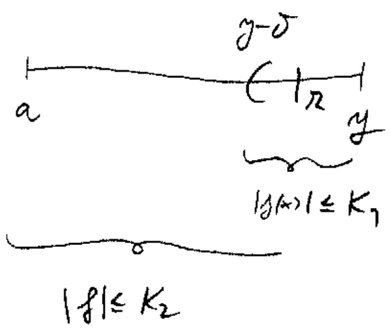
L.6.2: $\exists K_1 > 0$, $\exists \delta > 0$ tak, že

$|f(x)| \le K_1$ pro $\forall x \in \mathcal{U}_-(y,\delta) =$

$= (y - \delta, y]$.

Víč: $\exists r \in M \cap \mathcal{U}_-(y,\delta)$ speciálně $r \in M$.

tj. $\exists K_2 > 0$ tak, že $|f(x)| \le K_2$ pro $\forall x \in [a, r]$.



polož $K = \max\{K_1, K_2\}$.

$\Rightarrow |f(x)| \le K$ pro $x \in [a, y]$

neboli $y \in M$.

Poznámka: předpoklady nelze vynechat:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ spojitá na $I = (0,1]$; není omezená (I není uzavřený)
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ není omezená na uzavřeném intervalu $[0,1]$

  (ovšem $f(x)$ není zde spojité v 0 zprava...)

Definice. Nechť $f(x): I \to R$.

Řekneme, že $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ maximum (globální ~~maximum~~) vzhledem k I), jestliže pro $\forall x \in I$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že $f(x)$ má v x_0 lokální maximum (vzhledem k I), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že pro $\forall x \in I \cap \mathcal{U}(x_0, \delta)$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že $f(x)$ má v x_0 ostré lokální maximum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$ je $f(x) < f(x_0)$.

Analogicky (s opačnými nerovnostmi) se definuje minimum.

Souhrnný název pro maximum/minimum: extrém.

Věta 6.2. Nechť $f(x): I \to R$. Je-li x_0 vnitřní bod I a $f'(x_0)$ existuje a je nenulová, pak x_0 není (ani lokální) extrém f na I.

Dk: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$. BÚNO $f'(x_0) > 0$.

dle 2.1: $\exists \delta > 0$ tak, $\varphi(x) > 0$ pro $x \in P(x_0, \delta)$

BÚNO: $P(x_0, \delta) \subset I$.

$\forall x \in P(x_0, \delta)$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad / \cdot (x - x_0)$

(i): $x \in P_+(x_0, \delta)$: $x - x_0 > 0$ .. dostanu $f(x) - f(x_0) > 0$

$f(x) > f(x_0)$ tedy x_0 není lokální maximum.

(ii): $x \in P_-(x_0, \delta)$: $x - x_0 < 0$:

$f(x) - f(x_0) < 0$

$f(x) < f(x_0)$

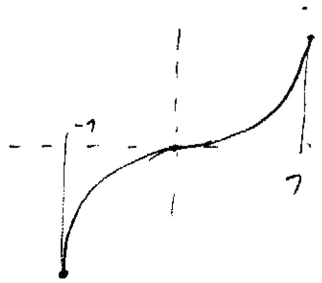
.. x_0 není ani lokální minimum.

Důsledek: nechť $f(x): I \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in I$ lokální extrém, pak platí

(i) x_0 je krajní bod, nebo (ii) $f'(x_0)$ neexistuje, nebo (iii) $f'(x_0)$ existuje a rovná se 0.

Příklady. • $f(x) = |x|$ má ... globální minimum v $x=0$;

lečí $f'(0)$ neexistuje



• $f(x) = x^3$ na $I = [-1,1]$.

$x=1$: globální maximum

vůči I; lečí $f'(1) = 3 \neq 0$

$x=0$: $f'(0)=0$; lečí $x=0$ není ani lokální extrém:

$f(x) > 0$ na $P_+(0,\delta)$;

< 0 na $P_-(0,\delta)$

Z příkladů je zjevné, že

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ je extrém

x_0 je extrém $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ neplatí.

Věta 6.3. (nabývání maxima.) Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I. Pak existuje $x_0 \in I$, v němž má $f(x)$ maximum. Také existuje $x_1 \in I$, v němž je minimum.

---

dk.: (maximum) $N = f(I) = \{f(x);\ x \in I\}$.

$N \neq \emptyset$; dle V. 6.1. je N omezená.

Věta A4: $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup N$.

Ukážeme: $\exists x_0 \in I$ tak, že $f(x_0) = S$ .. zjevně x_0 je bod maxima.

neboť $f(x) \leq S$ pro $\forall x \in I$.

Sporem: nechť $f(x) \neq S$ pro $\forall x \in I$:

tedy platí $f(x) < S$ pro $x \in I$:

definuji $\varphi(x) = \dfrac{1}{S - f(x)}$. Věta 2.14 $\Rightarrow \varphi(x)$ spojité v I.

Ukážeme: $\varphi(x)$ neomezené v I (to je spor s Větou 6.1.)

neboli: $(\forall K > 0)(\exists x \in I)(\varphi(x) > K)$

negace: $(\exists K > 0)(\forall x \in I)[\varphi(x) < K]$.

$K>0$ [illegible] $S-\frac{1}{K} < S = \sup N$ vlastnost (ii) suprema:

$$\exists y \in N \text{ tak, že } y > S-\frac{1}{K}$$

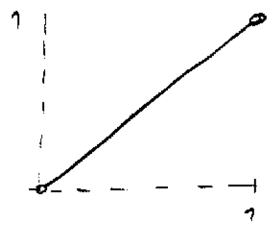
$$\therefore \exists x \in I: \ f(x) > S - \frac{1}{K}$$

$$\underbrace{\frac{1}{K}} > \underbrace{S - f(x)} \quad (>0)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{S-f(x)} > K .$$

<u>Protipříklady</u>: ① $f(x) = x$ na $(0,1)$ spojité, ale maximum / minimum nikde nenabývá.

není uzavřený

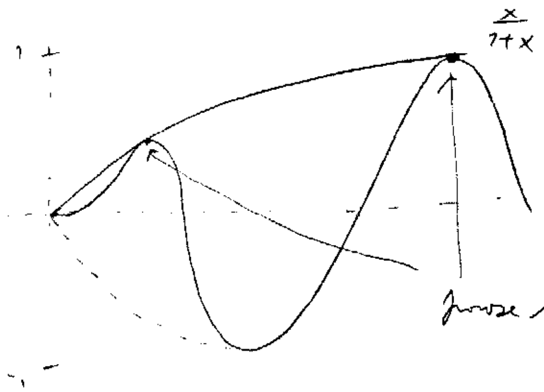


② $f(x) = \frac{x}{1+x} \sin x$; $x \in I = [0, \infty)$ není $(-1,1)$

$$|f(x)| \le \frac{x}{x+1} |\sin x| \le 1$$

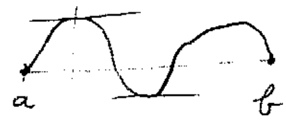
$$f(I) \subset (-1,1)$$

$$\sup_{x \in I} f(x) = 1 \ ; \text{ leč } f(x) < 1 \text{ pro } \forall x \in I.$$



pouze lokální maxima.

<u>Věta 6.4.</u> (Rolleova) Nechť f je spojitá v $[a, b]$, nechť $f(a) = f(b) = 0$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom $\exists x_0 \in (a, b)$ tak, že $f'(x_0) = 0$.



<u>Dk.:</u> <u>1. případ:</u> $f(x) = 0$ pro $\forall x \in (a, b)$.

zvol $x_0 \in (a, b)$ libovolně a platí $f'(x_0) = 0$.

<u>2. případ:</u> $\exists \tilde{x} \in (a, b)$ tak, že $f(\tilde{x}) \neq 0$; BÚNO $f(\tilde{x}) > 0$.

Věta <u>6.3:</u> $\exists x_0 \in [a, b]$ v němž je maximum.

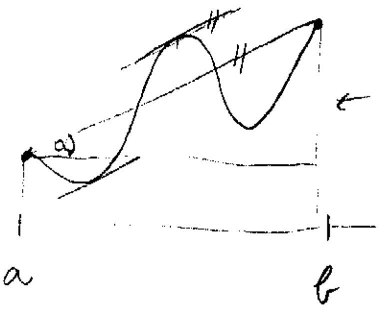
nutně $x_0 \neq a, b$ –

tedy x_0 je vnitřní bod a $f'(x_0)$ existuje dle předpokladu

<u>V. 6.2:</u> $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

<u>Věta 6.5.</u> (Lagrange) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$, nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Pak $\exists x_0 \in (a, b)$ tak, že

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha$$



← geometricky

<u>fyzikálně:</u> aspoň někdy jedu průměrnou rychlostí.

x .. čas, $f(x)$ dráha, $f'(x)$ .. okamžitá rychlost

<u>Dk.:</u> označ $L = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$; položíme $\varphi(x) = f(x) - f(a) - L(x - a)$

$\varphi(x)$ spojitá v $[a, b]$

$\varphi(a) = f(a) - f(a) - L \cdot (a - a) = 0$

$\varphi(b) = f(b) - f(a) - L(b - a) = 0$

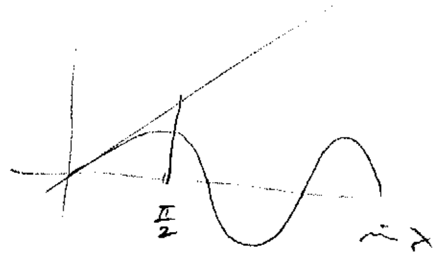
$\varphi'(x) = f'(x) - L \cdot x$ pro $\forall x \in (a, b)$

Věta 6.4. (Rolle): $\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$; $\varphi'(x_0) = 0$

$f'(x_0) = L$

Konec.

Příklad: $\sin x < x$ pro $\forall x > 0$.



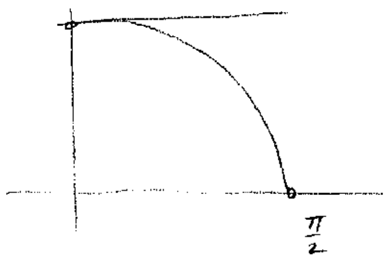
$$\varphi(x) = x - \sin x > 0 \text{ pro } \forall x > 0.$$

(a) $x \geq \frac{\pi}{2}$: $\varphi(x) \geq \frac{\pi}{2} - \sin x \geq \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{> \frac{3}{2}} - 1 > 0$

(b) $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ...

Lagrange: $\exists c \in (0, x) \subset (0, \frac{\pi}{2})$ tak, že

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(c) \cdot (x - 0) = \underbrace{(1 - \cos c)}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{>0} > 0.$$



$\cos c \in (0, 1)$ pro $c \in (0, \frac{\pi}{2})$.

dk.: $f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A$.

víme: $\lim_{x \to x_0+} f'(x) = A$; číl

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \dots \quad f'(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$; $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$.

nechť: $h \in (x_0, x_0+\delta)$ fixovaná.

V. 6.4: $[a, b] = [x_0, x_0+h]$

$\Rightarrow \exists c \in (x_0, x_0+h)$; $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x_0+h-x_0)$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(c) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon);$$

Věta 6.5 (Výpočet derivace limitou) Nechť $\exists \delta > 0$ tak, že f je spojitá na $U_+(x_0,\delta)$ a $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in P_+(x_0,\delta)$.
Potom $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} f'(x)$, pokud tato limita existuje.

Analogicky pro derivaci zleva a pro oboustrannou derivaci.

Dk: podle definice $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\eta \to x_0} \dfrac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0}$. ; nechť $f'(x) \to L$ pro $x \to x_0$.

$\eta \in (x_0, x_0+\delta)$ dáno: $f(x)$ spojitá na $[x_0, \eta]$

$\exists f'(x)$ pro $\forall x \in (x_0, \eta)$

$\Rightarrow \exists t_\eta \in (x_0, \eta)$ tak, že

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} = f'(t_\eta).$$

ověřím: $t_\eta \in (x_0, \eta) \Rightarrow t_\eta \to x_0$ pro $\eta \to x_0+$

a přitom $t_\eta \neq x_0$

$f'(x) \to L$ pro $x \to x_0+$

Věta o limitě složené fce: $f'(t_\eta) \to L$ pro $\eta \to x_0+$

a tedy $f'_+(x_0) = L$.

Příklady: (1) $\arcsin y$: spojitá na $U_-(1,\delta)$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in P_-(1,\delta)$$

$$(\arcsin y)'_-\Big|_{y=1} = \lim_{y \to 1-} (\arcsin y)' = \infty.$$

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$; $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \cdot (2x)$; $x \neq \pm 1$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \underline{-\infty}.$$

Lemma 6.3 Nechť $F(x), f(x)$ jsou spojité na $U(x_0,\delta)$, nechť $F'(x)=f(x)$ pro $\forall x \in P(x_0,\delta)$. Pak $F'(x_0)=f(x_0)$.

Dk.: Dle V.6.6 je $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} F'(x)$, pokud limita existuje.

$$\lim_{x\to x_0} F'(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ -- spojitost } f(x) \text{ v } x_0$$

$F'(x)=f(x)$ na $P(x_0)$ a Věta 2.5.

Příklad:
$$\underbrace{\int \frac{dx}{2+\cos x}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt3}\right)}_{F_0(x)} \quad ; \quad x \in (-\pi,\pi).$$

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x) & ; x \in (-\pi,\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt3} & ; x = \pi \\ F_0(x)+\frac{2\pi}{\sqrt3} & ; x \in (\pi,3\pi). \end{cases}$$

$F_1(x)$ spojité v $(-\pi,3\pi)$; $F_1'(x)=f(x)$ pro $x \in (-\pi,3\pi)\setminus\{\pi\}$

L.6.3. $\Rightarrow$ $F_1'(\pi)=f(\pi)$ a tedy

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = F_1(x) \text{ platí v } (-\pi,3\pi).$$

Definice: Říkáme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, jestliže platí: pokud y leží mezi $f(a), f(b)$, kde $a, b \in I$, pak existuje c mezi a, b tak, že $f(c) = y$.

Poznámka: V. 2.16 (Darbouxova): spojité fce mají Darbouxovu vlastnost.

Věta 6.7. Nechť $f(x)$ je spojité v otevřeném intervalu I a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in I$. Potom $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Dk: nechť $f'(a) < y < f'(b)$; $a < b \in I$.

cíl: $\exists c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = y$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < y$$

tedy $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} < y$ pro $0 < |h| < \delta_1$ (+)

$$\text{leč: } f'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} > y$$

tedy $\dfrac{f(b+h)-f(b)}{h} > y$ pro $0 < |h| < \delta_2$ (++)

zvol: $h \in (0, \min\{\delta_1, \delta_2\})$ pevné; BÚNO: $\underline{b - h > a}$.

polož $\varphi(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; $x \in [a, b-h]$

pozor: $\varphi(x)$ spojité v $[a, b-h]$

$\varphi(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} < y$ díky (+)

$$\varphi(b-h) = \frac{f(b-h+h) - f(b-h)}{h} = \frac{f(b+(-h)) - f(b)}{(-h)} > y$$

díky (++)

V. 2.16: $\exists \eta \in (a, b-h)$ tak, že

$$\varphi(\eta) = \frac{f(\eta+h) - f(\eta)}{h} = y$$

V. 6.5 (Lagrange): $\exists c \in (\eta, \eta+h)$: $f'(c) = \dfrac{f(\eta+h) - f(\eta)}{h} = y$.

Poznámky: smysl věty je tento: $f(x)$ spojitá $\not\Rightarrow$ $f'(x)$ spojitá, avšak má aspoň Darbouxovu vlastnost.

Důsledek: $f(x): I \to \mathbb{R}$ nemá Darbouxovu vlastnost
$\Rightarrow$ $f(x)$ nemá v I primitivní funkci.

Sporem: $F'(x) = f(x)$ v I $\Rightarrow$ $F(x)$ je spojitá v I
(V. 4.1 .. $F'(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ má vlastní derivaci v I).
a tedy V. 6.7: $F'(x) = f(x)$ má Darbouxovu vlastnost

Příklad: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ nemá prim. fci v $\mathbb{R}$

sporem: $F'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ ..
$F(x)$ spojitá (dle V. 4.1 – má vlastní derivaci)
$\Rightarrow F'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ má Darb. vlastnost: spor

$$\operatorname{sgn}(0) < \tfrac{1}{2} < \operatorname{sgn}(1) \overset{?}{\Rightarrow} \exists\, c \in (0,1);\ \operatorname{sgn}(c) = \tfrac{1}{2}$$

Věta 6.8 (Cauchy.) Nechť $f(x), g(x)$ jsou spojité v $[a,b]$, nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a,b)$ a $g'(x)$ existuje a je konečná, nenulová pro $\forall x \in (a,b)$. ~~$g(b)-g(a) \neq 0$~~

Potom $\exists\, c \in (a,b)$ tak, že
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Dů: z předpokladů na $g(x)$ $\Rightarrow$ $g(x)$ je ryze monotónní v $[a,b]$;
BÚNO $g(x)$ rostoucí.

značme $J = g(I)$; tj. $J = [\alpha, \beta]$; kde $\alpha = g(a) < \beta = g(b)$.

položme: $\varphi(t) = f\left(g_{-1}(t)\right);\ t \in J$.

$\varphi(t)$ .. spojitá v J .. neboť $g_{-1}: J \to I$ spojitá (V. 2.17 + spojitost $g(x)$)
$f(x)$ spojitá; V. 2.15

$$\varphi'(t) = f'\left(g_{-1}(t)\right) \cdot \left(g_{-1}(t)\right)'$$
$$= f'\left(g_{-1}(t)\right) \cdot \frac{1}{g'\left(g_{-1}(t)\right)}$$
.. Věty 4.3; 4.4
pro $\forall t \in (\alpha, \beta)$: $g_{-1}(t) \in (a,b)$
a zde g' existuje.

Cauchy (trik)

$$\varphi(x) = (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)) - (g(x)-g(a))\cdot(f(b)-f(a))\ ;$$

$\varphi(x)$ .. spojité v $[a,b]$ (Věta 2.14.)

$$\varphi(a) = 0-0 = 0$$

$$\varphi(b) = (g(b)-g(a))(f(b)-f(a)) - (g(b)-g(a))(f(b)-f(a))$$

$$\varphi'(x) = (g(b)-g(a))\, f'(x) - g'(x)\cdot(f(b)-f(a))$$

V. 6.4.: $\exists\, c \in (a,b);\ \varphi'(c)=0.$

$$(g(b)-g(a))\, f'(c) = g'(c)\,(f(b)-f(a))$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$$\underbrace{g(b)-g(a)}_{\neq 0} = g'(d)\cdot(b-a)\quad ;\ d\in(a,b).$$

$\neq 0.$

Lagrange (V. 6.5.) $\exists\, \gamma \in (\alpha, \beta)$ tak, že

$$\varphi'(\gamma) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

neboli

$$\frac{f'(g_{-1}(\gamma))}{g'(g_{-1}(\gamma))} = \frac{f(\overbrace{g_{-1}(\beta)}^{b}) - f(\overbrace{g_{-1}(\alpha)}^{a})}{g(b) - g(a)}$$

označ: $c = g_{-1}(\gamma)$; zjevně $c \in (a, b)$ .. závěr.

Pozn.: „naivní" důkaz: Lagr. $\exists c$: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}}$

Lagr. 2 $\exists c$: $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{\cancel{b - a}}$

---

podělím $\Rightarrow$ a závěr:

problém: c obecně jiné!

Věta 6.9. (l'Hospital) [lopitál] Uvažujme o limitě

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$ Nechť $\exists$ $f'(x), g'(x)$ existují konečné,

navíc $g'(x)\neq 0$ pro $\forall x\in P(x_0,\delta)$. Nechť dále buď (a) $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$

nebo (b) $|g(x)|\to\infty$ pro $x\to x_0$.

Potom: $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$ pokud limita vpravo existuje.

Platí i pro jednostranné limity.

Příklady: (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$f(x) = \sin x - x\cos x$

$g(x) = x^3;\ g'(x) = 3x^2$

l'Hosp: $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(\cos x - x\sin x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

jinak: $$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 1}-\cos x}{x^2} \overset{\text{částečná limita}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} = 0.$$

$\to\infty$; případ (b) $\qquad \frac{-x^a}{a}$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+\sin x} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\cos x}$$ neexistuje!!

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x\,\ln(1+x^2)} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x\cdot\ln(1+x^2)+\sin x\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}$$ … lépe jak

dk: 1. krok: $x \to x_0+$; $x_0 \in \mathbb{R}$

víme: $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L \in \mathbb{R}^*$; chceme $\frac{f(x)}{g(x)} \to L$.

varianta (a): $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0+$

$f(x), g(x)$ spojité v $\forall\ x \in (x_0, x_0+\delta)$

(existence vlastní derivace)

dodefinuji $f(0)=0$, $g(0)=0$.

spojité v x_0 zprava

$f(x), g(x)$ spojité na $[x_0, x_0+\delta)$.

buď $x \in (x_0, x_0+\delta)$ pevné:

V. 6.8: $\exists\, c_x \in (x_0, x)$ tak, že $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \to L$

navíc: $c_x \to x_0$ pro $x \to x_0+$

aneb $c_x > x_0$ pro $\forall x \in P_+(x_0, \delta)$

víme: $\dfrac{f'(y)}{g'(y)} \to L$ pro $y \to x_0+$

} limita složené fce: pro $x \to x_0+$

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \to L \text{ pro } x \to y_0 .$$

varianta (b): důkaz vynecháme...

2. krok: $x \to \infty$: víme: $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ cíl: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to L$ pro $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{L.2.3}}{=} \lim_{y\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \underset{\substack{\text{1. krok}\\ \text{(l'Hospital)}}}{=} \lim_{y\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}} \underset{\text{L.2.3}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

tvrdenie (b): náznak: $L \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \to \infty$ pre $x \to x_0$

fixuj $x < y \in P_+(x_0, \delta)$ .. $\exists\, c = c_{xy} \in (x, y)$ tak, že

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,; \qquad f(x) - f(y) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\big(g(x)-g(y)\big)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left[1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right].$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{1}{g(x)}\left\{f(y) - g(y)\cdot\frac{f'(c)}{g'(c)}\right\} + \left\{\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right\}$$

$\exists\, \delta_1 > 0$: $c \in (x_0, x_0+\delta_1) \Rightarrow \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$y \in (x_0, x_0+\delta_1)$ fixuj teraz:

$\exists\, \delta_2 > 0$ tak, že $x \in (x_0, x_0+\delta_2) \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)}\right| \cdot \big\{|f(y)| + |g(y)|\cdot(L+1)\big\} < \frac{\varepsilon}{2}$

$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

potom: zober $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$x \in (x_0, x_0+\delta)$: $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le |I_1| + |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

3. krok: $x \to x_0-$ .. analogicky

$x \to x_0$ obojstranne ..

$\varepsilon > 0$ dané; BÚNO: $\varepsilon < 1$.

$f(x)$ je $\left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{klesající} \end{array}\right\}$ v I, pokud: $x_1 < x_2 \in I \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) \le f(x_2) \\ f(x_1) \ge f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}\right\}$.

souhrnně: monotónní; rostoucí, klesající: ryze monotónní.

<u>Věta 6.10.</u> [Monotonie a znaménko derivace] Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $f'(x)$ je $\left\{\begin{array}{l} >0 \\ \ge 0 \\ \le 0 \\ <0 \\ =0 \end{array}\right\}$ pro každý <u>vnitřní</u> bod $x \in I$. Potom

$f(x)$ je $\left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{klesající} \\ \text{konstantní} \end{array}\right\}$ v I.

<u>dk.:</u> nechť $x_1 < x_2 \in I$. Lagrange (V. 6.5.) $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$$

c – je <u>vnitřní</u> bod I

<u>Příklad:</u> $f(x) = x^2$; $I = [0, \infty)$. $f'(x) = 2x > 0$ pro $\forall x \in (0, \infty)$ vnitřní body I.

$\Rightarrow f(x)$ rostoucí v $[0, \infty)$

---

stačí ověřit ale jen, všechny vnitřní body.

<u>Lemma 6.84.</u> Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $f'(x) \neq 0$ pro každý vnitřní bod I. Potom $f(x)$ je ryze monotónní v I.

<u>dk.</u> ukážeme, že buď (i) $f'(x) > 0$ nebo (ii) $f''(x) < 0$ $\}$ pro $\forall x \in I$ vnitřní.

a tedy $f(x)$ roste / klesá v I (V. 6.10.)

$\neg(i) \Rightarrow \exists x_1: f'(x_1) < 0$. V. 6.7.: $f'(x)$ má Darb. vlastnost:

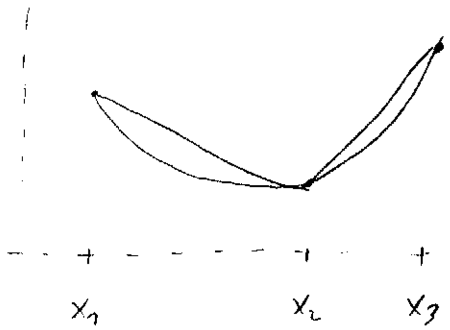
$\neg(ii) \Rightarrow \exists x_2: f'(x_2) > 0$. $\exists x_0$ mezi x_1, x_2 tak, že $f'(x_0) = 0$

spor.

Definice. Funkce $f(x)$ se nazývá konvexní v I, jestliže pro

$\forall\, x_1 < x_2 < x_3 \in I$ platí $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \boxed{\le} \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \quad (*)$$

Pokud místo $\boxed{\le}$ píšeme $<$ resp. $\ge$ resp. $>$, jde o funkci ryze konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní.



mnemotechnicky: 4 písmena.
konvexní
konkávní

Lemma 6.5. [Ekvivalentní definice konvexity.] Funkce $f(x)$ je konvexní v I, právě když pro $\forall\, a,b \in I$ a pro $\forall\, \lambda \in (0,1)$ platí
$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \quad (**)$$

Dk: $(**) \Rightarrow f(x)$ konvexní.

$x_1 < x_2 < x_3$ dáno; polož $x_1 = a$; $x_3 = b$ a zvol λ tak, že
$$\lambda a + (1-\lambda) b = x_2$$
$$\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) x_3 = x_2$$
$$\lambda (x_1 - x_3) = x_2 - x_3$$
$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in (0,1)$$
$$0 < x_3 - x_2 < x_3 - x_1$$

$(**)$: $$f(x_2) \le \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3)$$

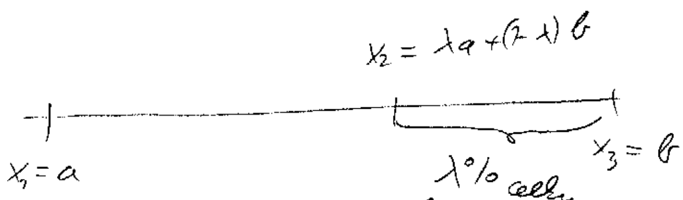
$$1-\lambda = 1 - \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$$

$$(x_3-x_1) f(x_2) \le (x_3-x_2) f(x_1) + (x_2-x_1) f(x_3) \quad \Big/ \pm x_2 f(x_2)$$

$f(x_2)\cdot(x_2-x_1)+f(x_2)\cdot(x_3-x_2)\le \dots$

$$[f(x_2)-f(x_1)]\cdot(x_3-x_2)\le [f(x_3)-f(x_2)]\cdot(x_2-x_1)$$

i (*).



$f(x)$ konvexní $\overset{?}{\Rightarrow}$ (**).

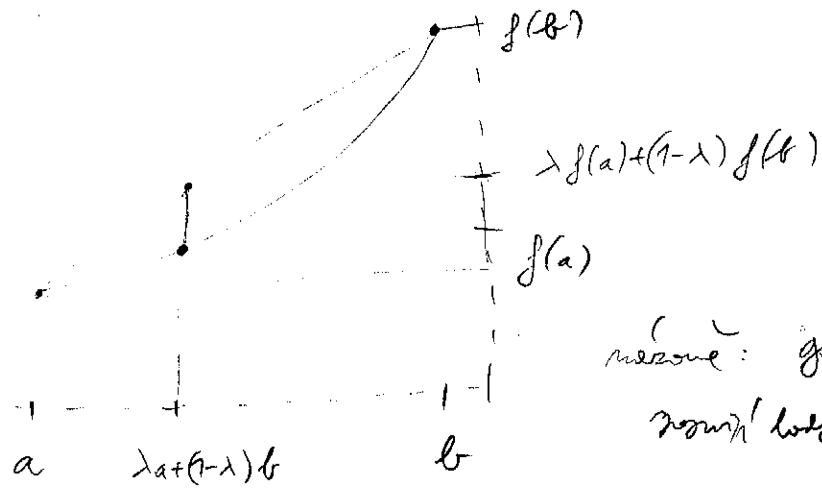
$a<b\in I$; $\lambda\in(0,1)$ dáno: položme: $x_1=a$, $x_3=b$;
$x_2=\lambda a+(1-\lambda)b$.

$$x_2=\lambda a+(1-\lambda)b>\lambda a+(1-\lambda)a=a=x_1$$

podobně $x_2<x_3$. $\qquad x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$

---

a zpětnou úpravou získáme z (*) → (**).



názorně: graf f leží pod úsečkou, spojující body $[a,f(a)]$ a $[b,f(b)]$.

Věta 6.11. [Konvexita a monotonie derivace.] Nechť $f(x)$ je spojitá I, kde I je interval s krajními body a, b. Jestliže $f'(x)$ existuje pro $\forall x\in(a,b)$ a je $\left\{\begin{array}{c}\text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\\ \text{nerostoucí}\\ \text{klesající}\end{array}\right\}$ v (a,b), pak $f(x)$ je $\left\{\begin{array}{c}\text{ryze konvexní}\\ \text{konvexní}\\ \text{konkávní}\\ \text{ryze konkávní}\end{array}\right\}$ v I.

---

dk: $x_1<x_2<x_3$: $\exists\, c_1\in(x_1,x_2)$: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c_1)$

$\exists\, c_2\in(x_2,x_3)$: $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(c_2)$

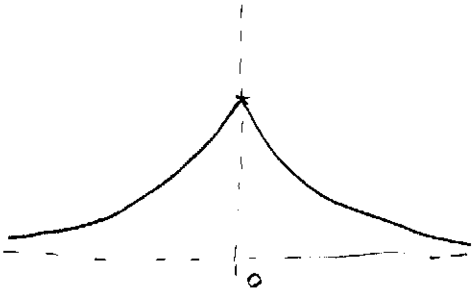
tedy $c_1<c_2$ a mezi $f'(c_1)$, $f'(c_2)$ je nerovnost, která zaručí závěr.

Příklad: $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$; $f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}\,(-\operatorname{sgn} x)$; $x \neq 0$.

$f'(0)$ neexistuje.

$f(x)$ spojitá v $[0,\infty)$

$x \in (0,\infty)$: $f'(x) = \frac{-1}{1+|x|}$ .. rostoucí $\Rightarrow$ $f(x)$ je ryze konvexní v $[0,\infty)$



analogicky: $f(x)$ ryze konvexní v $(-\infty, 0]$.

přesto: $f(x)$ není konvexní v R.

srovnej: $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ rostoucí v } (a,b] \\ f(x) \text{ rostoucí v } [b,c) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ rostoucí v (a,c)

Věta 6.12. [Znaménko $f''(x)$ a konvexita] Nechť je interval s krajními body a, b. Nechť $f''(x)$ existuje vlastní pro $\forall x \in (a,b)$ a nechť

$$\left\{\begin{array}{l} f''(x) > 0 \\ f''(x) \geq 0 \\ f''(x) \leq 0 \\ f''(x) < 0 \end{array}\right\} \text{ pro } \forall x \in (a,b). \text{ Potom } f(x) \text{ je } \left\{\begin{array}{l} \text{ryze konvexní} \\ \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \\ \text{ryze konkávní} \end{array}\right\} \text{ v } I.$$

Dk: $f''(x) = \{f'(x)\}'$ $\exists$ vlastní pro $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow$ $f'(x)$ je spojité v (a,b)

znaménko $f''(x)$ $\Rightarrow$ určí typ monotonie $f'(x)$ (Věta 6.10.)

$\Rightarrow$ typ konvexity / konkávnosti (Věta 6.11.)

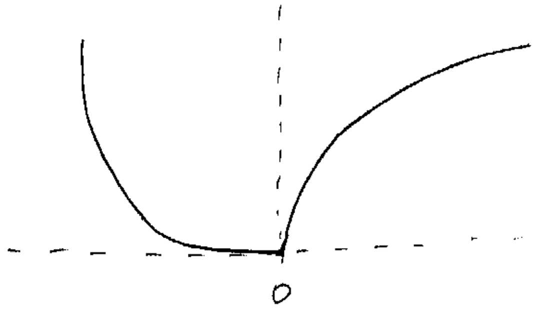
např.: $f''(x) \leq 0$ v (a,b) $\xRightarrow{\text{V. 6.10.}}$ $f'(x)$ neroste v (a,b) $\xRightarrow{\text{V. 6.11.}}$ $f(x)$ konkávní v I.

Definice. Řekneme, že x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, jestliže

(i) existuje $f'(x_0)$

a (ii) $\exists\, \delta > 0$ tak, že na jednom z intervalů $(x_0-\delta)$, $(x_0+\delta)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní.

Příklady: • $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,; & x \geq 0 \\ x^2\,; & x < 0. \end{cases}$



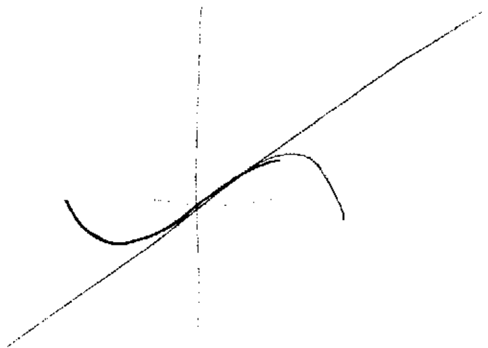
$f(x)$ ryze konvexní na $(-1, 0]$
ryze konkávní na $[0, 1)$

-- přesto 0 není inflexní bod (dle naší definice: (i) neplatí).

$$f'_-(0) = 0; \quad f'_+(0) = \infty.$$

• $f(x) = \sin x$ má v 0 inflexní bod. $f'(x) = \cos x$;
tedy (i) $f'(0)$ existuje; $f'(x)$ .. klesající na $(0, \frac{\pi}{2})$
rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, 0)$

$f(x)$ .. ryze konkávní na $[0, \frac{\pi}{2})$
ryze konvexní na $(-\frac{\pi}{2}, 0]$.



Pozn. [Hlubší vlastnosti konv. fcí]

$f(x)$ konvexní v $I \Rightarrow$

- spojité uvnitř I
- $\exists\, f'_+(x), f'_-(x)$ uvnitř I;
  (vlastní uvnitř)
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ je globální minimum.

---

kreslit (představit si)
(umíme jen po částech kon/kon fce)