4. Derivace

Definice. Nechť $f(x)$ je definovaná na jistém $\mathcal{U}(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci, jestliže existuje $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

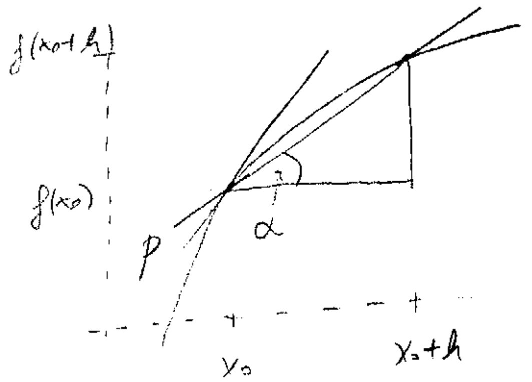
Značíme $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$; $[f(x)]'\big|_{x=x_0}$

Terminologie: $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ – (konečná) vlastní derivace

$f'(x_0)=\pm\infty$ .. nevlastní derivace.

Poznámky.

- ekvivalentně: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\left(x = x_0+h \right)$
- $f(x)=g(x)$ na jistém $\mathcal{U}(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$
- geometrický význam:



$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ... směrnice přímky p (= úhel k ose x)

$h\to 0$: p se stává sečnou

tj. $f'(x_0)$ ... směrnice tečny.

- fyzikální význam: $s=s(t)$
  dráha, čas

  $\dfrac{s(t_0+\tau)-s(t_0)}{\tau}$ .. průměrná rychlost v době t_0 až $t_0+\tau$

  $\tau\to 0$: „okamžitá rychlost" v bodě t_0.

- derivováním vznikne nová funkce $f'(x)$:

  $\mathcal{D}(f')=\{x;\ f'(x) \text{ existuje}\}$.

  $f'(x)$ může nabývat i $\pm\infty$.

Příklady

(1) $c' = 0$: $\quad f(x) = c$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x_0) = ?$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \text{ na jistém } P(0)$$

$$\text{tedy } \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to 0 \text{ pro } h \to 0.$$

(2) $(x^n)' = n x^{n-1}$; $\quad n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R}$.

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = x^n + n h x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}$$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot \underbrace{h^{(k-1) \geq 1}}_{\to 0} \quad h \to 0$$

$$\to n x^{n-1}.$$

(3) $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ $\quad x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}\right] = \frac{1}{x^n (x+h)^n} \cdot \frac{x^n - (x+h)^n}{h}$$

$$= \frac{-1}{x^n (x+h)^n} \cdot \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \to \frac{-1}{x^{2n}} \cdot n x^{n-1}$$

$$= \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$\frac{1}{h}\left[\cos(x+h) - \cos x\right] = -2 \sin\frac{h}{2} \cdot \sin\frac{2x+h}{2}$$

$$= -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \to -\sin x.$$

(5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{h}\left[\ln(x+h) - \ln x\right] = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x} \to \frac{1}{x}$$

pro $h \to 0$.

(6) $(e^x)' = e^x$.

$$\frac{1}{h}\left[e^{x+h}-e^x\right]=\frac{1}{h}\left[e^x\cdot e^h-e^x\right]=e^x\cdot\underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1}\to e^x \text{ pro } h\to 0$$

(7) $\operatorname{sgn}'(0)=\infty$:

$$\frac{1}{h}\left[\operatorname{sgn}(h)-\operatorname{sgn}(0)\right]=\frac{\operatorname{sgn}(h)}{h}\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{|h|}\to\infty \text{ pro } h\to 0.$$

ne kruhu $h\neq 0$

Věta 2.8. $|h|\to 0$ pro $h\to 0$

$|h|>0$ na $P(0)$.

Definice: Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$). Řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava (resp. zleva), jestliže existuje $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]$ respektive $\lim\limits_{h\to 0-}\frac{1}{h}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]$.

Značíme: $f'_+(x_0)$ resp. $f'_-(x_0)$; $\left(f(x)\right)'_+\Big|_{x=x_0}$ resp. $\left[f(x)\right]'_-\Big|_{x=x_0}$

Poznámky • ekvivalentně: $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ resp. $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

• z Věty 2.2 plyne: ekvivalence tvrzení

(1) $f'(x_0)$ existuje a rovná se A

(2) $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ existují a rovnají se témuž A.

Příklady: (1) $|x|'=?$ (a) $x_0>0$: $|x|=x$ na jistém $U(x_0)$

$|x_0|'=1$

(b) $x_0<0$: $|x_0|'=-1$.

(c) $(|x|)'_+\Big|_{x=0}$: $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$

$|x|=x$ na $P_+(0)$.

podobně: $(|x|)'_-\Big|_{x=0}=-1$.

souhrnně:

$(|x|)'$ $= \operatorname{sgn} x$; $x\neq 0$

neexistuje pro $x=0$.

(2) $\left(\sqrt{x}\right)'_+\Big|_{x=0}=\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}$; $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $x\in P(0)$

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}\to 0 \text{ pro } x\to 0+\\ \sqrt{x}>0 \text{ pro } x\in P(0)\end{array}\right\}\overset{\text{V. 2.8.}}{\Longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{x}}\to\infty$ pro $x\to\infty$.

Věta 4.1 Nechť $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci. Pak $f(x)$ je v x_0 spojitá.

dk: stačí $f(x) \to f(x_0)$ pro $x \to x_0$. (Věta 2.5).

$$x \in P(x_0) \;\text{---}\; f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} \to f(x_0) \quad \text{pro } x \to x_0.$$

Poznámky:

- důležité je vlastní.

  $\operatorname{sgn}(x)$ má derivaci v 0; ale je tam nespojitá
  (∞)

- jednostranné verze: $f(x)$ má v x_0 konečnou derivaci zprava $\Rightarrow f(x)$ spojitá v x_0 zprava.

- opačně: $f(x)$ je spojitá $\not\Rightarrow f(x)$ má derivaci.

  viz $|x|$ v bodě $x=0$.

  složitý příklad: existuje funkce spojitá všude v $\mathbb{R}$, která nemá derivaci (ani jednostrannou) v žádném bodě.

Věta 4.2 Nechť $f(x), g(x)$ mají vlastní derivaci v x_0. Potom

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

(3) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{1}{g^2(x_0)}\left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\right]$.

---

dk: (1) $\frac{1}{h}\left[(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)\right] = \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right] + \frac{1}{h}\left[g(x_0+h) - g(x_0)\right]$

$\to f'(x_0) + g'(x_0)$ pro $h \to 0$
(Věta 2.3)

(2) podobně

$\pm f(x_0+h)g(x_0)$

(3) $\frac{1}{h}\left[f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)\right] =$

$$\frac{1}{h}\left[g(x_0+h) - g(x_0)\right] \underbrace{f(x_0+h)}_{\downarrow\, f(x_0) \;\text{(V. 4.1)}} + \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right] \cdot g(x_0) \to g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

(4): nejprve (4'): $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{[g(x_0)]^2}$

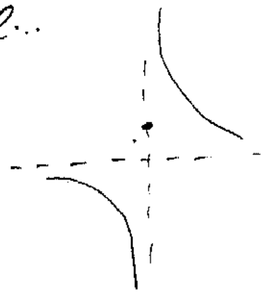
$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right] = \underbrace{\frac{1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}}_{\to \frac{1}{[g(x_0)]^2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{h}\left[g(x_0) - g(x_0+h)\right]}_{\to -g'(x_0)} \to -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$(4') \Rightarrow (4)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left[f\cdot\frac{1}{g}\right]'(x_0) \overset{(3)}{=} f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$
$$= \frac{1}{[g(x_0)]^2}\left\{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)\right\}.$$

Poznámky:
- platí pro jednostranné derivace (tj. $h \to 0+$)
- více násobení: $(f\cdot g\cdot h)'(x_0) = f'(x_0)(g\cdot h)(x_0) + f(x_0)\cdot(g\cdot h)'(x_0)$
- bod (3) nemusí platit, má-li pravá strana smysl...

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases} \qquad f'(0) = \infty$$



$(f\cdot f)'(0)$ neexistuje; ač $f(0)f'(0) + f'(0)f(0) =$
$1\cdot\infty + \infty\cdot 1 = \infty.$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}-1}{h} = \frac{1-h}{h^2} \to \infty\ ; \quad (f\cdot f)'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h^2}-1}{h}$$
$$= (1-h^2)\cdot\frac{1}{h^3} \quad \text{nemá limitu.}$$

Příklady:

① $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(\cos x\cdot\cos x - \sin x\,(-\sin x)\right) =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}\ ; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad (\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

② $$(e^x\cos x)' = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x\cos x + e^x(-\sin x)$$
$$= e^x\{\cos x - \sin x\}.$$

Věta 4.3 ... složené funkce) ... [illegible]
nechť $g(y)$ má vlastní derivaci v $y_0 = f(x_0)$. Potom $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Dk.: $\frac{1}{x-x_0}\left[g(f(x)) - g(f(x_0))\right]$ – pro $x \to x_0$

případ 1: $f'(x_0) \neq 0$: $\exists \delta > 0$ tak, že $h \in P(x_0,\delta) \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq 0$

a tedy $f(x_0+h) \neq f(x_0)$

$$= \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}}_{\to g'(y_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \; ; \quad \varphi(y) = \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \to g'(y_0) \text{ pro } y \to y_0$$

V. 2.6.(a).

leč $f(x) \to y_0 = f(x_0)$ pro $x \to x_0$

$f(x) \neq y_0$ na $P(x_0,\delta)$.

Lemma 4.1. Nechť $f'(x_0) \neq 0$. Potom $f(x) \neq f(x_0)$ na jistém $P(x_0)$.

Dk.: označ $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$ .. Lemma 2.1.

$\exists \delta > 0$: $\varphi(x) \neq 0$ pro $x \in P(x_0,\delta)$

a tedy $f(x) - f(x_0) \neq 0$.

---

případ 2: $f'(x_0) = 0$ .... z zadání (*) stačí ukázat $(f\circ g)'(x_0) = 0$.

$\varphi(y) \to g'(y_0) \in R$ ... L.2.1: $\exists K>0, \eta>0$: $|\varphi(y)| \le K$ pro $y \in P(y_0,\eta)$

$$\left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\right| \le K \Rightarrow |g(y)-g(y_0)| \le K|y-y_0|$$

avšak poslední platí i pro $y = y_0$:

celkem: $|g(y) - g(f(x_0))| \le K\,|y - f(x_0)|$

pro $\forall y \in U(f(x_0),\eta)$.

$f(x)$ spojité v x_0: $\exists \delta > 0$: $x \in P(x_0,\delta)$

$\Rightarrow f(x) \in U(f(x_0),\eta)$.

celkem pro $x \in P(x_0, \delta)$:

$$\left| \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[g(f(x)) - g(f(x_0)) \right] \right| \leq K \left| \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to 0} \right| \to 0 \text{ pro } x \to x_0$$

neboť $f'(x_0) = 0$.

Příklady: ① $\left[\cos(x^2)\right]' = \left(-\sin(x^2)\right) \cdot 2x$; $x \in \mathbb{R}$

vnější: $g(y) = \cos y$; $g'(y) = -\sin y$

vn. $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$

② $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(y) = \sqrt{y}$; $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ .. $y > 0$; neboť $x^2 + 1 > 0$ pro $\forall x > 0$.

$f(x) = x^2 + 1$; $f'(x) = 2x$

③ $\left[f(ax+b)\right]' = f'(ax+b) \cdot a$; x – takové, že $f'(y)$ známe v $ax+b$ definovanou

④ $\{x^x\}' = \{e^{x \cdot \ln x}\}' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)'$

$= x^x (1 + \ln x)$.

⑤ $(|f(x)|)' = f'(x) \cdot \mathrm{sgn}\{f(x)\}$ .. pokud $f(x) \neq 0$.

$g(y) = |y|$; $|y|' = \mathrm{sgn}(y)$ pro $\forall y \neq 0$

Věta 4.4. (derivace inverzní funkce) [illegible]

nechť $f(x)$ je spojité, ryze monotónní v I. Označ $J = f(I)$, $\varphi(y): J \to I$ je funkce inverzní k f. Nechť $y_0 \in J$ je vnitřní bod. Potom

(1) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(\varphi(y_0))}$.

(2) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = \pm\infty$, pak $\varphi'(y_0) = 0$

(3) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = 0$, pak $\varphi'(y_0) = \infty$ pro $f(x)$ rostoucí, a $\varphi'(y_0) = -\infty$ je-li $f(x)$ klesající.

---

dk.: $y_0 \in J$ dáno; označ $x_0 = \varphi(y_0)$.. vidíme, že x_0 je vnitřní bod I. počítám $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}$

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(\varphi(y)) - f(\varphi(y_0))}{\varphi(y) - \varphi(y_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f(\varphi(y)) - f(x_0)}{\varphi(y) - x_0}}$$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \text{ pro } x \to x_0 \\ \varphi(y) \to \varphi(y_0) = x_0 \text{ pro } y \to y_0 \\ \quad (\text{spojitost } \varphi \text{ dle V. 2.17}) \\ \varphi(y) \neq \varphi(y_0) \text{ pro } y \in P(y_0, \delta) \\ \quad \varphi \text{ ryze monotónní..} \end{array}\right\}$ Věta 2.6.(b) $\Rightarrow$ $\psi(y)$

$$\frac{f(\varphi(y)) - f(x_0)}{\varphi(y) - x_0} = \frac{y - y_0}{\varphi(y) - \varphi(y_0)} \longrightarrow$$

pro $y \to y_0$ $f'(x_0) = f'(\varphi(y_0))$

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{\varphi(y) - \varphi(y_0)}}$$

tedy (1), (2) plyne z Věty 2.7

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\psi(y)}$$

(3) $\psi(y) \to 0$ pro $y \to y_0$.

(a) $f(x)$ rostoucí $\Rightarrow \varphi(y)$ rostoucí $\Rightarrow \psi(y) > 0$ pro $y \neq y_0$

Věta: 2.8: $\dfrac{1}{\psi(y)} \to \infty$ pro $y \to y_0$

(b) $f(x)$ klesající: $\psi(y) < 0$ podobně...

Příklady. 1) $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}}$

pro $y \in (-1,1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

pomocný výpočet: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\cos^2 z = 1 - \sin^2 z$$

$$|\cos z| = \sqrt{1-\sin^2 z}\quad ; \text{ protože } \cos z > 0$$

(neboť $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z}$$

$\arcsin y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2) $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} y)} = \cos^2(\operatorname{arctg} y) = \dfrac{1}{1+y^2}.$

$y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \Big/ \ \cos z \neq 0 \quad (z \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 z} \quad ; \text{ polož } z = \operatorname{arctg} y \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\cos^2(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

3) $(\sqrt[n]{y})' = ?$ $\qquad f(x) = x^n;\ f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

(a) n sudé: $y>0$

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{y})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

(b) n liché: $n \geq 3$

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}} \quad \text{pro } y \neq 0 \quad (\text{V. } 4.4.(1))$$

$$(\sqrt[n]{y})'\Big|_{y=0} = \infty \quad (\text{V. } 4.4(3);\ \text{neboť } f(x) = x^n,\ f'(0) = 0,\ f(x) \text{ rostoucí}).$$