## 2. [illegible] funkce [illegible]

**funkce:** $M, N$ ... množiny.

funkce z $M$ do $N$ ... libovolný předpis, který každému prvku z $M$ přiřadí právě jeden prvek z $N$

(zobrazení)

$$f: M \to N$$
$$x \mapsto f(x)$$

dále definujeme

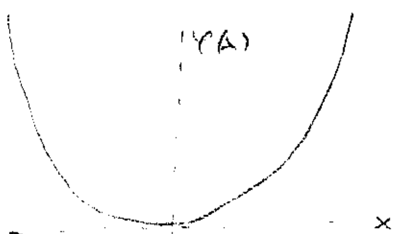
$A \subset M$ ... $f(A) := \{ f(x) ;\ x \in A \}$ ... obraz množiny

$B \subset N$ ... $f^{-1}(B) := \{ x \in M ;\ f(x) \in B \}$ ... vzor množiny

funkce je *prostá*, pokud $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

funkce $f: M \to N$ je *na* (zobrazuje $M$ na $N$), pokud $f(M) = N$.

**Příklad:** $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$




$$\varphi((-1,1)) = [0,1)$$
$$\varphi^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$$

$\varphi$ není prosté; zobrazuje $\mathbb{R}$ na $[0,+\infty)$.

je-li $f: M \to N$ prosté a na, je tzv. vzájemně jednoznačné.

→ lze definovat inverzní funkci (inverzní zobrazení)

$f_{-1}: N \to M$; $y \in N \mapsto$ to jediné $x \in M$, že $f(x) = y$.
(řešení)

je-li $f: M \to N$; $A \subset M$: $f|_A$ ... restrikce $f$ na $A$

... stejná funkce, ale vezmu jen $x \in A$.

**Příklad:** $\varphi(x) = x^2$: $\varphi|_{[0,+\infty)}$ zobrazuje $[0,+\infty)$ vzájemně jednoznačně na $[0,+\infty)$

funkce k ní inverzní je $\sqrt{x}$.

Pozor na rozdíl mezi $f^{-1}$ a $f_{-1}$.

je-li $f: M \to N$; $g: N \to K$ ...

lze definovat složené zobrazení (superpozice) $g \circ f : M \to K$

$$x \longmapsto g(f(x)).$$

---

občas píšu $\varphi : M \to N$, i když $\varphi(x)$ není definováno pro všechna $x \in M$

potom $\mathcal{D}(\varphi)$ .. (definiční obor)

$$\mathcal{H}(\varphi) = \varphi(\mathcal{D}_\varphi) \quad \text{.. (obor hodnot)}$$

např. $x^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; leč $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

---

**Definice.** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ je

$$\left\{\begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{neklesající} \end{array}\right\} \text{ na } M, \text{ pokud } \forall x, y \in M;\ x < y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) < f(y) \\ f(x) > f(y) \\ f(x) \geq f(y) \\ f(x) \leq f(y) \end{array}\right\}.$$

Řekneme, že $f$ je shora omezená, pokud $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : f(x) \leq M$.

zdola omezená, pokud $\exists L \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : f(x) \geq L$

omezená, pokud je shora i zdola omezená.

Řekneme, že $f$ je lichá, pokud $f(-x) = -f(x)$

sudá $f(-x) = f(x)$

má periodu $p$, pokud $f(x+p) = f(x)$ $\Big\}$ $\forall x \in \mathcal{D}_f$

---

nás budou zajímat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\pm\infty$ nebudou ani v def. oboru, ani v hodnotách funkcí..

**Pozn.:** Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lze chápat jako dvojici funkcí

$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$

neboli $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$,

$f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$.

později

$\mathcal{U}(x_0,\delta) := (x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x\in\mathbb{R};\ |x-x_0|<\delta\}$ kulové $\delta$-okolí $x_0$

$\mathcal{P}(x_0,\delta) := \mathcal{U}(x_0,\delta)\setminus\{x_0\} = (x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ prstencové $\delta$-okolí $x_0$

$\mathcal{U}(\infty,\delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty]$ ; $\mathcal{P}(\infty,\delta) = (\frac{1}{\delta},\infty)$

$\mathcal{U}(-\infty,\delta) = [-\infty, -\frac{1}{\delta})$ ; $\mathcal{P}(-\infty,\delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$

---

$\mathcal{U}_+(x_0,\delta) = [x_0, x_0+\delta)$ .. pravé kulové $\delta$-okolí $x_0$

$\mathcal{P}_+(x_0,\delta) = (x_0, x_0+\delta)$ pravé prstencové $\delta$-okolí $x_0$

$\mathcal{U}_-(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0]$

$\mathcal{P}_-(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0)$

---

$\mathcal{U}_-(\infty,\delta) = \mathcal{U}(\infty,\frac{1}{\delta})$ ; $\mathcal{U}_+(\infty,\delta)$ .. nemá smysl

$\mathcal{U}_+(-\infty,\delta) = \mathcal{U}(-\infty,-\frac{1}{\delta})$ ; $\mathcal{U}_-(\infty,\delta)$ .. nemá smysl.

---

<u>Poznámky</u>

- pozorujeme: $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \mathcal{U}(x_0,\delta_1)\subset\mathcal{U}(x_0,\delta_2)$ (menší $\delta$, menší okolí).
- rozdíl mezi $\mathcal{U}(x_0,\delta)$ a $\mathcal{P}(x_0,\delta)$ : bod $x_0$
- $x_0\in\mathbb{R}$: $\mathcal{U}(x_0,\delta) = \{x\in\mathbb{R};\ |x-x_0|<\delta\}$
  $\mathcal{P}(x_0,\delta) = \{x\in\mathbb{R};\ 0<|x-x_0|<\delta\}$
- občas píšeme $\mathcal{U}(x_0)$ pokud na $\delta$ nezáleží.
  „na jistém $\mathcal{U}(x_0)$ platí ..."..
  $\exists\,\delta>0$ tak, že pro $\forall x\in\mathcal{U}(x_0,\delta)$ platí...

---

<u>Věta 2.1.</u> (Hausdorffův princip oddělení). Nechť $x_0, x_1\in\mathbb{R}^*$, $x_0\neq x_1$. Pak existuje $\delta>0$ tak, že $\mathcal{U}(x_0,\delta)\cap\mathcal{U}(x_1,\delta)=\emptyset$. Speciálně $x_0\notin\mathcal{U}(x_1,\delta)$, $x_1\notin\mathcal{U}(x_0,\delta)$.

Dk. 1. $x_0, x_1\in\mathbb{R}$: položme $\delta = \frac{|x_0-x_1|}{3}$.

sporem: nechť $y\in\mathcal{U}(x_0,\delta)\cap\mathcal{U}(x_1,\delta)$ : $|x_0-y|<\delta$; $|x_1-y|<\delta$

$$|x_0-x_1| = |(x_0-y)-(x_1-y)| \underset{\text{V.1.1}}{\leq} |x_0-y|+|x_1-y| \leq 2\delta = \frac{2}{3}|x_0-x_1|.$$

spor; neboť $|x_0-x_1|>0$.

2. $x_0 = -\infty$, $x_1 \in \mathbb{R}$. $\quad$ hled. $\delta > 0$ tak, že $-\frac{1}{\delta} < x_1 - 1$

$$-\ 1 - x_1 < K \qquad\qquad 1 - x_1 < \frac{1}{\delta}$$

BÚNO: $K > 1$ $\quad -K < x_1 - 1$ $\qquad \delta = \min\left\{1, \frac{1}{K}\right\}$.

tedy $\delta = \frac{1}{K} < 1$ $\quad \boxed{-\frac{1}{\delta} < x_1 - 1}$

$$\mathcal{U}(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right);$$

$$\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \subset (x_1 - 1, x_1 + 1);$$

3. $x_0 = \infty$, $x_1 = -\infty$ nebo $x_0 \in \mathbb{R}$; $x_1 = \infty$ d. cv.

---

**Definice.** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $\mathcal{P}(x_0)$.
Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě $x_0$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[\ \underline{x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)\right].$$

Značíme $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$, nebo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Terminologie: pro $A \in \mathbb{R}$ jde o limitu vlastní (konečnou); pro $A = \pm\infty$ je nevlastní.

Poznámky:
- limita v $x_0$ nezávisí na $f(x_0)$; $f$ nemusí být v $x_0$ ani definována!
  neformálně: $x$ "blízko" $x_0$, ale různé od $x_0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ "blízko" $A$.
- ekvivalentní zápisy:
  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[\ f(\mathcal{P}(x_0, \delta)) \subset \mathcal{U}(A, \varepsilon)\right]$$
  resp.: pro $x_0, A \in \mathbb{R}$:
  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right].$$
- limita (pokud existuje) je nejvýše jedna:
  sporem: nechť $f(x) \to A$ a zároveň $f(x) \to B$ pro $x \to x_0$;
  $$A \neq B \in \mathbb{R}^*.$$
  V.2.1 $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tak, že $\mathcal{U}(A, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(B, \varepsilon) = \emptyset$.
  $\exists\, \delta_1 \ldots \forall x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ je $f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$
  $\exists\, \delta_2 \ldots \forall x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ je $f(x) \in \mathcal{U}(B, \varepsilon)$ $\qquad$ **Spor.**
  
  vol: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow x \in \mathcal{P}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(B, \varepsilon) = \emptyset$

Výklady: ① $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. cíl $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[0<|x-2|<\delta \Rightarrow |x^2-4|<\varepsilon\right]$.

náč.: $(x^2-4)=(x+2)(x-2)$;

$$|x^2-4| \le |x+2|\cdot|x-2| \le \left(|x-2|+4\right)\cdot|x-2|.$$

$$|x+2| = |(x-2)+4| \le \left(|x-2|+4\right)$$

$\varepsilon>0$ dáno: polož: $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$.

nechť $0<|x-2|<\delta$: pak

$$|x^2-4| \le \underbrace{\left(|x-2|+4\right)}_{\le 5}\cdot\underbrace{|x-2|}_{<\delta} < 5\cdot\delta \le \varepsilon.$$

② $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. cíl: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[0<|x|<\delta \Rightarrow \frac{1}{x^2}\in\mathcal{U}(\infty,\varepsilon)\right]$.

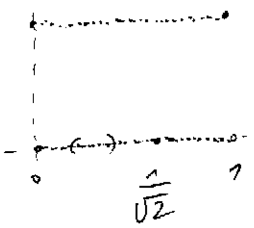
$$\mathcal{U}(\infty,\varepsilon) = \left(\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$

$\varepsilon>0$ dáno: stačí položit $\delta=\sqrt{\varepsilon}$.

$$0<|x|<\delta \Rightarrow \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ ; tedy}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{|x|^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

③ !! Dirichletova funkce: $D(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0; & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$




Tvrzení: $D(x)$ nemá limitu v žádném bodě $x_0\in\mathbb{R}$.

Sporem: nechť $\lim\limits_{x\to x_0} D(x) = A$.

1. $A=0$: tj: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon\right]$.

   spec: $\varepsilon=\frac{1}{2}$: $\exists\delta>0$: $x\in(x_0,x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)|<\frac{1}{2}$

   spor: $I=(x_0,x_0+\delta)$ obsahuje dle V.1.3 rac. číslo, kde $f=1$.

2. $A\neq 0$: V.2.1 $\Rightarrow \exists\varepsilon>0$ tak, že $\mathcal{U}(A,\varepsilon)\not\ni 0$.

   vím: $\exists\delta>0$ tak, že $x\in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)\in\mathcal{U}(A,\varepsilon)$.

   ale: $P(x_0,\delta)$ obsahuje irac. čísla; $f(x)=0$ : spor.

Definice: [illegible]

(resp. $P_-(x_0)$). Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě $x_0$ zprava (resp. zleva), jestliže

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x \in P_+(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)\right]$$

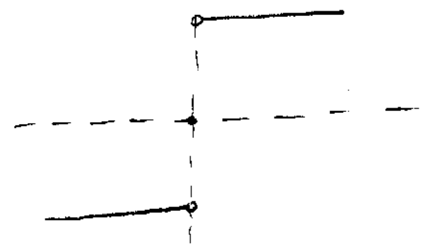
respektive

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x \in P_-(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)\right].$$

Značíme $f(x) \to A$ pro $x \to x_0+$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$

respektive $f(x) \to A$ pro $x \to x_0-$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

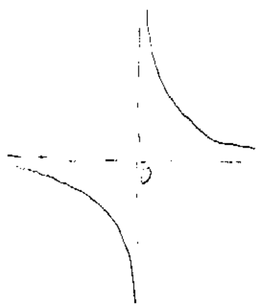
**Příklady:** (1) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$



pozn.: $f(x) = 1 \quad \forall x \in P_+(0,\delta) = (0,\delta) \ \ldots$

$$\lim_{x\to 1+} \operatorname{sgn}(x) = 1; \quad \lim_{x\to 1-} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.



tzn. $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x \in P_-(0,\delta) \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{U}(-\infty,\varepsilon)\right]$

$$x \in (-\delta,0) \Rightarrow \frac{1}{x} \in \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$\varepsilon>0$ dáno: stačí volit $\delta = \varepsilon$:

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta}$$

podobně: (d.cv.) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

**Věta 2.2** Následující tvrzení jsou ekvivalentní: (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje a rovná se $A$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ existují a rovnají se číslu $A$.

**Důsledek:** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistují. (neboť lim zleva a zprava sice existují, ale jsou různé)

D. (11.2.)

(2) $\Rightarrow$ (1) : cíl: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x\in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon)\right]$

$\varepsilon>0$ dáno: dle (2)

$\exists \delta_1$ tak, že $x\in P_+(x_0,\delta_1) \Rightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon)$ (*)

$\exists \delta_2$ tak, že $x\in P_-(x_0,\delta_2) \Rightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon)$ (**)

položíme: $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Pak

$x\in P(x_0,\delta) \Rightarrow x\in P_+(x_0,\delta)$ nebo $x\in P_-(x_0,\delta)$

a tedy $f(x)\in U(A,\varepsilon)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) je snadné, (d. cv.)

Úmluva: [illegible] vždy $\in \mathbb{R}$ [illegible]

tj.: $\pm\infty$ ani v argumentu; ani hodnota funkce.

$\exists K>0$, $\exists \delta>0$ : míní $\exists K \in (0,+\infty)$, $\delta \in (0,+\infty)$.

Definice: Funkce $f$ se nazve omezená na množině $M \subset \mathbb{R}$, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(x)| \leq K$ pro $\forall x \in M$.

rovněž: shora, zdola, pozvolna.

Příklady: (1) $\sin x$ omezená v $\mathbb{R}$: $|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\frac{1}{x}$ není omezená na okolí $\mathcal{P}(0)$

Lemma. 2.1.

(1) Nechť $f(x)$ má v bodě $x_0$ vlastní limitu.

Pak $f(x)$ je omezená na jistém $\mathcal{P}(x_0)$, tj.

$$(\exists K>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in \mathcal{P}(x_0,\delta))\left[\,|f(x)| \leq K\,\right].$$

(2) Nechť $f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu (i nevlastní), různou od $0$.

Pak $(\exists \Delta>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in \mathcal{P}(x_0,\delta))\left[\,|f(x)| \geq \Delta\,\right]$,

neboli $f(x)$ je na jistém $\mathcal{P}(x_0)$ odražená od $0$.; spec. $f(x) \neq 0$ na jist. $\mathcal{P}(x_0)$.

dk. (1) .. $\exists \delta>0$ tak, že $x \in \mathcal{P}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,1)$

$$|f(x)-A| < 1 \quad \mathcal{L}.1.1$$

$$-1 < f(x)-A < 1$$

$$A-1 < f(x) < A+1$$

tedy $f(x)$ je omezená na $\mathcal{P}(x_0,\delta)$.

(2) nechť $f(x) \to B$ pro $x \to x_0$; $B \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

1. $B \in (-\infty,0)$: $\underset{V.2.1}{\exists}\, \varepsilon>0$ tak, že $0 \notin \mathcal{U}(B,\varepsilon) = (B-\varepsilon, B+\varepsilon)$

$B$ záporné: $\Rightarrow B+\varepsilon < 0$.

$\exists \delta>0$ tak, že

$$x \in \mathcal{P}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

spec. $f(x) < B+\varepsilon < 0$

$|f(x)| > \Delta$; kde $\Delta = |B+\varepsilon| > 0$.

2. $B = -\infty$: $\Delta = 1$;

Věta … ([illegible])

Nechť $f(x)\to A$, $g(x)\to B$ pro $x\to x_0$, kde $A, B\in\mathbb{R}$. Potom

(1) $f(x)+g(x)\to A+B$

(2) $f(x)-g(x)\to A-B$

(3) $f(x)\cdot g(x)\to A\cdot B$

(4) $f(x)/g(x)\to A/B$ (jsou-li navíc $B\neq 0$)
(Z nuly dělit…)

pro $x\to x_0$.

$(\forall\eta>0)(\exists\delta>0)\left[x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow |f(x)-A|<\eta\right]$ (4!)

– " – (1+)

Dk. (1) cíl: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left[x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)+g(x)\in U(A+B,\varepsilon)\right]$

$$|f(x)+g(x)-(A+B)|<\varepsilon$$

$$|f(x)+g(x)-(A+B)| = |f(x)-A+(g(x)-B)| \underset{V.1.1}{\leq} |f(x)-A|+|g(x)-B|$$

$\varepsilon>0$ dáno: $(\exists\delta_1>0)\left[x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}\right]$

$(\exists\delta_2>0)\left[x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}\right]$.

položme $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$: $x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow |f(x)+g(x)-(A+B)|$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) podobně jako (1)

(3) užijeme trik:

$$f(x)g(x)-A\cdot B=(f(x)-A)\cdot g(x)+(g(x)-B)\cdot A$$

lze udělat malé!

je omezené: L.2.1.

je to číslo

L.2.1 $\Rightarrow \exists K>0, \exists\delta_0>0$: $x\in P(x_0,\delta)\Rightarrow |g(x)|\leq K$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$; užij def. s $\dfrac{\varepsilon}{2K}$:

$$(\exists\delta_1>0)\left[x\in P(x_0,\delta_1)\Rightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2K}\right]$$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$: užij s $\dfrac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$

$$(\exists\delta_2>0)\left[x\in P(x_0,\delta_2)\Rightarrow |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}\right.$$

položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ... $x \in P(x_0, \delta)$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - AB| \leq |f(x)-A| \cdot |g(x)| + |g(x)-B| \cdot |A| < \varepsilon$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{2K} \cdot K}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} \cdot |A|}_{\frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{|A|}{|A|+1}}_{<1}} < \varepsilon.$$

(4) ukážeme (4') $G(x) \to B$; $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{G(x)} \to \frac{1}{B}.$$

$$\frac{1}{G(x)} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B \cdot G(x)} \cdot \underbrace{(B - G(x))}_{\text{umíme udělat malé}};$$

nesmí být moc malé:

$\mathcal{L}$. 2.1: $\exists \Delta > 0, \exists \delta_0 > 0: x \in P(x_0, \delta_0) \Rightarrow |G(x)| \geq \Delta.$

$G(x) \to B: \exists \delta_1 > 0 \quad x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow |G(x) - B| < \varepsilon |B| \cdot \Delta$

položme $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. $x \in P(x_0, \delta)$

$$\left| \frac{1}{G(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{1}{|B| \cdot |G(x)|} \cdot \underbrace{|B - G(x)|}_{< \varepsilon |B| \cdot \Delta} < \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|\Delta|} \cdot \varepsilon |B| \cdot \Delta = \varepsilon$$

$$\frac{1}{|G(x)|} \leq \frac{1}{\Delta}$$

tedy $\frac{1}{G(x)} \in \mathcal{U}\left(\frac{1}{B}, \varepsilon\right)$.

položme: $g(x) = \frac{1}{G(x)} \to \frac{1}{B}$ dle (4'), pro $x \to x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot G(x) \longrightarrow A \cdot \frac{1}{B} \text{ dle (3)};$$

tím je (4) dokázáno...

---

<u>**Pozn.:**</u> jednostranné verze: místo píši $x \to x_0+$ místo $x \to x_0$.

$P_+(x_0, \delta)$ místo $P(x_0, \delta)$

tj: $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0+$ $\Rightarrow$ $f(x) \cdot g(x) \to AB$ pro $x \to x_0+$

Věta 2.4. Nechť $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.

Potom $f(x) \cdot g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.

dk. $(\exists K>0)(\exists \delta_1>0): x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x)| \leq K.$

$g(x) \to 0 \; : \; \exists \delta_2 > 0 : x \in P(x_0, \delta_2) \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$

položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$: $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow$

$$|f(x) g(x)| = \underbrace{|f(x)|}_{\leq K} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{K}} < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

cht: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0): \left[ x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) g(x)| < \varepsilon \right].$

**Definice.** Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$.
Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0$, jestliže

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[ x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \right].$$

ekvivalentně

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[ f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon) \right].$$

Věta 2.5 (Vztah limity a spojitosti) Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0$, právě když $f(x) \to f(x_0)$ pro $x \to x_0$.

dk. (1) $f(x)$ spojitá: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[ x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \right].$

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[ x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \right].$

$U(x_0, \delta) = P(x_0, \delta) \cup \{x_0\}.$

zjevně $(1) \Rightarrow (2)$.; opačně: víme: $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$.

chci totéž pro $x \in U(x_0, \delta)$.

zbývá bod: $x_0$: $f(x_0) \in U(f(x_0), \varepsilon)$ vždy.

(každý bod je ve svém libovolném okolí...)

Poznámka: spojité funkce ... limitu spočítáme dosazením $x = x_0$.

(funguje oběma směry)

Příklady: (1) $f(x) = x$ je spojitá v každém $x_0 \in R$.

(2) polynom: $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$;

kde $a_n \in R$ konstanty.

Tvrzení: polynom je spojitý v $\forall x_0 \in R$.

$p(x) = x^3 - 3x + 1$; pro $x \to x_0$

V. 2.3. $\quad x^3 = x \cdot x \cdot x \to x_0 \cdot x_0 \cdot x_0 = x_0^3$

$-3 \cdot x \to -3x_0$

$1 \to 1$

$p(x) \to x_0^3 - 3x_0 + 1 = p(x_0)$.

(3) racionální funkce: $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$; $p, q$ .. polynomy

je spojitá v každém bodě, kde $q(x) \neq 0$.

pro $x \to x_0$ je $p(x) \to p(x_0)$

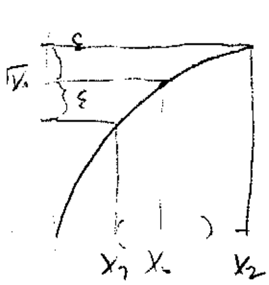
$q(x) \to q(x_0) \neq 0$; V.2.3,(4)

V.2.3.(4) $\Rightarrow R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \to \dfrac{p(x_0)}{q(x_0)} = R(x_0)$.

(4) $\sin x, \cos x, e^x$ ... spojité v $\forall x_0 \in R$

$\log x$ ... spojitý v $(0, \infty)$ ..... (později)

(5) $\sqrt[n]{x}$ .. spojitá ve svém definičním oboru..



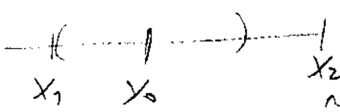

$\overline{\sqrt{x}}$ ukážeme, že $\sqrt{x}$ je spojitá v $\forall x_0 \in (0, \infty)$

tj: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow \sqrt{x} \in U(\sqrt{x_0}, \varepsilon)\right]$.

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow \left(\sqrt{x_0} - \varepsilon < \sqrt{x_0} < \sqrt{x_0} + \varepsilon\right)$ $(*)$

$\varepsilon > 0$: dáno: BÚNO: $\varepsilon$ tak malé, že $\sqrt{x_0} - \varepsilon \geq 0$.

tedy: $(*)$: $\underbrace{(\sqrt{x_0} - \varepsilon)^2}_{x_1} < x_0 < \underbrace{(\sqrt{x_0} + \varepsilon)^2}_{x_2}$




vidíme,

položme: $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$

potom: $x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow x_1 < x < x_2 \Rightarrow \sqrt{x} \in U(\sqrt{x_0}, \varepsilon)$.

(5)(?) sgn(x) spojitá ... $x \in \mathbb{R}$ kromě $0$.

↳ nespojitá v $0$: neboť $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje. (viz V.2.5)

↳ spojitá v $\forall x_0 > 0$ :?   $x_0 > 0$ dokaž: $\exists \delta > 0$ tak,

$\mathcal{U}(x_0, \delta) \not\ni 0$; tedy

$\mathcal{U}(x_0, \delta) \subset (0, \infty)$

$\operatorname{sgn}(x) = 1$ na $\mathcal{U}(x_0, \delta)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \operatorname{sgn}(x) = 1 = \operatorname{sgn}(x_0)$.

(6) ~~(7)~~ $f(x) = x \cdot D(x)$; $D(x)$ .. Dirichletova funkce

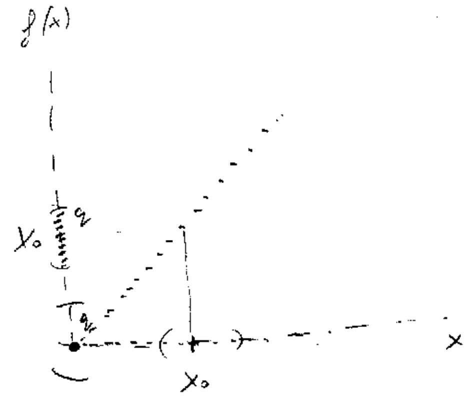
↳ je spojitá jedině v bodě $x = 0$; jinde nespojitá.

1. $x = 0$.   $D(x)$ je omezená (v $\mathbb{R}$), $x \to 0$ pro $x \to 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow f(x) = x \cdot D(x) \to 0 = f(0)$ V.2.4 pro $x \to 0$.

2. $x_0 \neq 0$.   $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[ f(\mathcal{P}(x_0, \delta)) \subset \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon) \right]$.

pozor: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

tedy $f(\mathcal{P}(x_0, \delta)) = \mathcal{P}(x_0, \delta) \cap \mathbb{Q} \cup \{0\}$




sporem: zvol $\varepsilon > 0$ tak, že $0 \notin \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$.
$x_0 \notin \mathcal{U}(0, \varepsilon)$.

$\exists \delta > 0$: $\mathcal{P}(x_0, \delta) \cap \mathbb{Q} \subset \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$

BÚNO: $\underline{\delta < \varepsilon}$

1. $x_0 \in \mathbb{Q}$: $f(x_0) = x_0$:

$\mathcal{P}(x_0, \delta) \cap \mathbb{Q} \subset \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$

spec. $0 \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ .. spor.

2. $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $f(x_0) = 0$:

$\mathcal{P}(x_0, \delta) \cap \mathbb{Q} \subset \mathcal{U}(0, \varepsilon)$.

spor: $\mathcal{P}(x_0, \delta) \cap \mathcal{U}(0, \varepsilon) = \emptyset$.

Věta 2.6. (limita kompozice, [illegible])

nechť $g(y) \to A$ pro $y \to y_0$, kde $x_0, y_0, A \in \mathbb{R}^*$. Nechť je dále splněn jeden z následujících předpokladů

(a) $g(y)$ je spojitá v $y_0$;

(b) $\exists \delta_0 > 0$ tak, že $f(x) \neq y_0$ na $P(x_0, \delta_0)$

Potom $g(f(x)) \to A$ pro $x \to x_0$.

dk.: cíl: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow g(f(x)) \in U(A, \varepsilon)\right]$.

$\varepsilon > 0$ dáno. $g(y) \to A$ pro $y \to y_0$ $\Rightarrow \exists \eta > 0 : \underline{y \in P(y_0, \eta)} \Rightarrow g(y) \in U(A, \varepsilon)$ (+)

(zvenčí)

$f(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$ $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \underline{x \in P(x_0, \delta_1)} \Rightarrow \underline{f(x) \in U(y_0, \eta)}$ (++)

chci položit $f(x) = y$

tedy potřebuji další předpoklady.

(a): $g(y)$ spojité v $y_0$ (musí $y_0 \in \mathbb{R}$)

$\exists \eta > 0 : \underline{y \in U(y_0, \eta)} \Rightarrow g(y) \in U(A, \varepsilon)$

$x \in P(x_0, \delta_1) \overset{(++)}{\Rightarrow} g(f(x)) \in U(A, \varepsilon)$

(b) .. položme: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_0\}$.

$x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(y_0, \eta) \setminus \{y_0\} = P(x_0, \eta)$

$(+) \Rightarrow g(f(x)) \in U(A, \varepsilon)$

Příklady ① $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = \sqrt{3}$

$f(x) = x^2 - 3x + 1 \to 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$ pro $x \to 2$

$g(y) = \sqrt{y}$ spojité v $y_0 = 3$.

$g(y) \to \sqrt{3}$ pro $y \to 3$

② $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2 + x)}{x} = 1$.

$\underbrace{\dfrac{\sin(x^2 + x)}{x^2 + x}}_{g(f(x)) \to 1} \cdot \underbrace{(x+1)}_{\to 1}$ ; $g(y) = \dfrac{\sin y}{y} \to 1$ pro $y \to 0$

$f(x) = x^2 + x$; $f(x) \to 0$ pro $x \to 0$; $f(x) \neq 0$ na $P(0, 1)$

[illegible]

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,; \quad g(y) = \begin{cases} 1 & y = 0 \\ 0 & y \neq 0. \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; $\lim_{y \to 0} g(y) = 0$ (neboť $g = 0$ na $P(0,\delta)$)

ale $g(f(x)) = 1$ na $P(0,\delta) \Rightarrow g(f(x)) \to 1$ pro $x \to 0$.

---

**Poznámka** jednostranná verze:

$g(y) \to A$ pro $y \to y_0+$;

$f(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$;

navíc nechť: $(\exists \tilde{\delta} > 0)\left[x \in P(x_0, \tilde{\delta}) \Rightarrow f(x) > y_0\right]$.

---

Pak $g(f(x)) \to A$ pro $x \to x_0$.

**Poznámka** • $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(-\infty, \varepsilon)\right]$

$f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$

ekvivalentně: $(\forall L < 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) < L\right]$.

(píši $-\frac{1}{\varepsilon} = L$)

podobně: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$:

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) > K\right].$$

• $c \in \mathbb{R}$: $c > 0$: $c \cdot \infty = \infty$, $c \cdot (-\infty) = -\infty$

$c < 0$: $c(-\infty) = \infty$, $c \cdot (\infty) = -\infty$

$\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$

$\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$.

---

$\infty \cdot \infty = \infty$

pro $x \to x_0$, kde $x_0, A, B \in R^*$. Potom

(1) $f(x) + g(x) \to A+B$

(2) $f(x) - g(x) \to A-B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

(4) $f(x)/g(x) \to A/B$, pro $x \to x_0$, má-li výraz vpravo smysl.

---

dk.

(1) $A+B$ má smysl: $A, B \in R$; ... věta 2.3

$A \in R$; $B = \pm\infty$

$A = \infty$, $B = \infty$

$A = -\infty$, $B = -\infty$.

$A \in R$; $B = \infty$: chci: $f(x) + g(x) \to A + \infty = \infty$.

$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) + g(x) > K\right]$.

$f(x) \to A$: $\exists \delta_1 > 0$: $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, 1)$

zej. $f(x) > A - 1$

$g(x) \to \infty$: $(\forall L > 0)(\exists \delta_2 > 0)$ $x \in P(x_0, \delta_2)$: $g(x) > L$

mohu $L$ volit, že $L > K - (A-1)$.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$$x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{> A-1} + \underbrace{g(x)}_{> K-(A-1)} > K$$

$A = -\infty$, $B = -\infty$: chci $f(x) + g(x) \to A + B = -\infty$

$(\forall L < 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) + g(x) < L\right]$.

$\exists \delta_1 > 0$: $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < L$

$\exists \delta_2 > 0$ $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow g(x) < L$.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow$

$f(x) + g(x) < 2L < L$.

$A \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ B = \pm\infty$

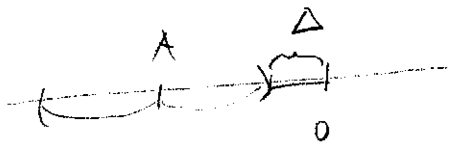
$A = \pm\infty,\ B = \pm\infty$

- $A \in (-\infty, 0),\ B = -\infty.$ úl.: $f(x)\cdot g(x) \to A\cdot B = \infty$

$$(\forall K>0)(\exists \delta>0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)g(x) > K\right].$$

$f(x) \to A \neq 0$: $\mathcal{L}.\ 2.1 \Rightarrow \exists \Delta > 0, \exists \delta_1 > 0$:

$x \in P(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x)| \geq \Delta$




dokonce: $f(x) \leq -\Delta < 0$.

$g(x) \to -\infty$: $(\forall L<0)(\exists \delta_2>0)\left[x \in P(x_0,\delta_2) \Rightarrow g(x) < L\right].$

$K>0$ dáno: mějme $L = \frac{K}{-\Delta}$.

polož $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$$x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{\leq -\Delta}\cdot\underbrace{g(x)}_{< \frac{K}{-\Delta}} > (-\Delta)\left(\frac{K}{-\Delta}\right) = K$$

pozn.: $\begin{array}{l} f(x) < C \\ g(x) < d \end{array} \Rightarrow f(x)\,g(x) < C\cdot d$;

platí ale $f(x), g(x) \geq 0$

pokud záporné: $C, d \leq 0 \Rightarrow f(x)\,g(x) > C\cdot d$.

- $A = -\infty,\ B = \infty$: úl. $f(x)\cdot g(x) \to A\cdot B = -\infty$.

$$(\forall L<0)(\exists \delta>0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)g(x) < L\right].$$

$L<0$ dáno: $g(x) \to -\infty$: $\exists \delta_1 > 0$: $x \in P(x_0,\delta_1) \Rightarrow g(x) < L$

$f(x) \to \infty$: $\exists \delta_2 > 0$ : $x \in P(x_0,\delta_2) \Rightarrow f(x) > 1$.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $x \in P(x_0,\delta)$

$$\underbrace{f(x)}_{>1}\cdot\underbrace{g(x)}_{<L<0} < L$$

(1)

$A \in \mathbb{R}$; $B = \pm\infty$

$A \in \mathbb{R}$; $B = -\infty$. cil: $f(x)/g(x) \to A/B = 0$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon\right]$$

$\varepsilon > 0$ dane: L.21: $\exists \delta_1 > 0$ $\exists K > 0$ $x \in P(x_0,\delta_1)$. $|f(x)| \le K$

$g(x) \to -\infty$: $(\forall L < 0)(\exists \delta_2 > 0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow g(x) < L\right]$.

połóż $L = \frac{-K}{\varepsilon}$.   wtedy $|g(x)| > |L|$

$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{L}$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$$x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \underbrace{|f(x)|}_{<K} \cdot \underbrace{\frac{1}{|g(x)|}}_{<\frac{\varepsilon}{K}} < \varepsilon$$

---

Pozorwanie: $a < b$, $c < d$ $\overset{?}{\Rightarrow} a \cdot c < b \cdot d$

nie wtedy: $1 < 2$, $-4 < -3$ ale $1 \cdot (-4) \not< 2 \cdot (-3)$, $-4 \not< -6$

jeżeli mamy: $a, b > 0 \Rightarrow ac < bd$

jeśli $a, b < 0 \Rightarrow ac > b \cdot d$

$c < d \mid a\ (<0)$, $ac > \underline{ad}$ | $c < d \mid b\ (<0)$, $\underline{bc} > bd$

? $ad > bc$; $ad - bc = a(d-c) + b(d-c) > 0$

$ac - bd = a(c-d) + ad - bd = a(c-d) + d(a-b)$

Příklady: (1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0.$

$$x^2 = x\cdot x \to \infty\cdot\infty = \infty$$
$$x^2+1 \to \infty + 1 = \infty$$
$$\frac{1}{x^2+1} \to \frac{1}{\infty} = 0$$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + 3x^2 + 4 = -\infty.$

$$x^3 \to (-\infty)\cdot(-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$$
$$x^2 \to \infty$$

$x^3 + 3x^2 + 4 \to -\infty + \infty + 4$ nemá smysl.

$$x^3 + 3x^2 + 4 = \underbrace{x^3}_{\to-\infty}\Big(1 + \underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow} + \underbrace{\frac{4}{x^3}}_{\downarrow\, 0}\Big)$$ vytknutí vedoucího členu:

$$\to (-\infty)\cdot(1 + 0 + 0) = -\infty.$$

(3) Proč nedefinujeme např. $\frac{\infty}{\infty}$ ?

protože $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$: obecně nevíme, co dělá $\frac{f(x)}{g(x)}$.

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2+1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \to \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = 1.$$

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{x} = x \to \infty$

(c) Tj: operace s $\infty$ jsou definovány právě tak, aby platila Věta 2.7.

Později: $\boxed{0\cdot\infty = 0}$ $\boxed{\frac{1}{0} = \infty}$

**Věta 2.8** Nechť $f(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.

(1) Je-li navíc $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$ pro $x \to x_0$

(2) Je-li naopak $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$ pro $x \to x_0$.

dk: (2) cíl: $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$, tj. $(\forall L<0)(\exists \delta>0)\left[x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < L\right]$.

$L < 0$ dáno: potom $\varepsilon = \frac{-1}{L} > 0$., protože $f(x) \to 0$

$\exists \delta_1 > 0$ tak, že $|f(x)| < \varepsilon$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta_1)$

$(2) \Rightarrow \exists \delta_2 > 0$ tak, že $f(x) < 0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta_2)$.

položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$$x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow |f(x)| = -f(x) < \varepsilon$$

$$-f(x) < \frac{-1}{L}$$

$$\frac{1}{L} < f(x) \quad \Big| \ \frac{L}{f(x)}$$

obě záporné: $\frac{1}{f(x)} < L$.

**Příklady** ① $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x} = \infty$

, $\sqrt{x} \to 0$ pro $x \to 0+$ (d.cv.)

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{x} = \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{+\infty} = \infty$$

$\sqrt{x} > 0$ pro $x \in P_+(0,\delta)$.

tedy $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ V.2.8(1).

$\frac{\sin y}{y} \to 1$ pro $y \to 0$

$\sqrt{x} \to 0$ ; leč $\sqrt{x} \neq 0$ pro $x \in P(0,\delta)$

Věta. 2.6. (2)

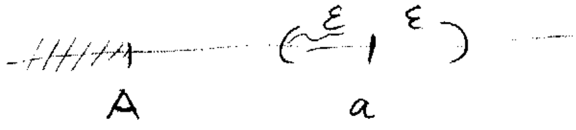
② $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x+x^2} = -\infty$ V.2.8(2)

$x + x^2 \to 0$ pro $x \to 0+$

$$x + x^2 = \underbrace{x}_{<0}\underbrace{(1+x)}_{>0} < 0 \text{ na } P_-(0, \tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2}, 0).$$

**Věta 2.9** (Zachování $\le$ v limitě) Nechť $f(x)\to a$ pro $x\to x_0$. Nechť $\exists A\in\mathbb{R}$ tak, že $f(x)\le A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a\le A$.

Dk: sporem: nechť $a>A$. V.2.1: $\exists\ \varepsilon>0$ tak, že $A\notin \mathcal{U}(a,\varepsilon)$;




dokonce silněji:

A „vzdáleno" od $\mathcal{U}(a,\varepsilon)$;

tj: $A<y$ pro $\forall y\in\mathcal{U}(a,\varepsilon)$

$f(x)\to a$: $(\exists\ \delta_1>0)$ tak, že $f(x)\in\mathcal{U}(a,\varepsilon)$ pro $\forall x\in P(x_0,\delta_1)$

ale: $\exists\ \delta_2>0$ tak, že $f(x)\le A$ pro $\forall x\in P(x_0,\delta_2)$.

**Poznámka**
- zrcadlová verze: píši „$\ge$" místo „$\le$".
- neplatí verze s ostrou nerovností:

$$f(x)<A \text{ na } P(x_0)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0} f(x)<A.$$

Př: $f(x)=1-\frac{1}{x}$; $f(x)<1$ pro $x\in P(\infty,\delta)$ ale $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

souhrnně: neostrá nerovnost se v limitě zachová; ostrá se může stát rovností!

$\le,\ge$ se zachová, $<,>$ se mění na $\le$, $=$.

**Věta 2.10** (O dvou policajtech). Nechť $f(x), g(x), h(x)$ jsou definované na jistém $P(x_0)$.

(1) Nechť $g(x)\le f(x)\le h(x)$ na jistém $P(x_0)$ a nechť $\exists a\in\mathbb{R}$ tak, že $g(x)\to a$, $h(x)\to a$ pro $x\to x_0$. Potom $f(x)\to a$ pro $x\to x_0$.

(2) Nechť $g(x)\le f(x)$ na j. $P(x_0)$ a nechť $g(x)\to\infty$ pro $x\to x_0$. Potom $f(x)\to\infty$ pro $x\to x_0$.

(3) Nechť $f(x)\le h(x)$ na $P(x_0,\delta)$ a nechť $h(x)\to-\infty$ pro $x\to x_0$. Potom $f(x)\to-\infty$ pro $x\to x_0$.

dk (1) cíl: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ x\in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x)\in U(a,\varepsilon)$

$$U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

$\varepsilon>0$: dáno: $(\exists \delta_1>0)\ x\in P(x_0,\delta_1) \Rightarrow g(x)\in U(a,\varepsilon)$

zec. $g(x) > a-\varepsilon$

$(\exists \delta_2>0):\ x\in P(x_0,\delta_2) \Rightarrow h(x)\in U(a,\varepsilon)$

zec. $h(x) < a-\varepsilon$

$\exists \delta_3>0:\ x\in P(x_0,\delta_3) \Rightarrow g(x)\le f(x)\le h(x)$

zvolíš $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$.

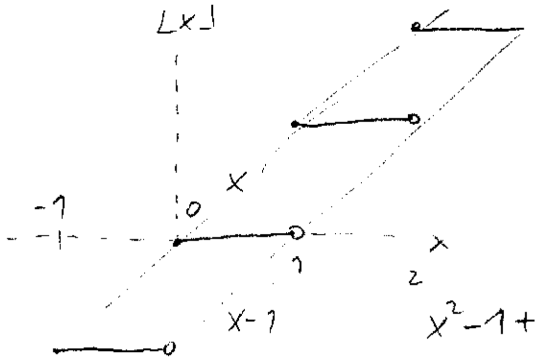
$x\in P(x_0,\delta) \Rightarrow \underbrace{a-\varepsilon <}\ g(x)\le f(x)\le h(x)\ \underbrace{< a+\varepsilon}$

$\Rightarrow f(x)\in U(a,\varepsilon)$

(2),(3) d.cv.

**Príklad:** (1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{\lfloor x^2\rfloor+1}$ ; kde $\lfloor y\rfloor := \max\{k\in\mathbb{Z};\ k\le y\}$.

celá část $y$.




pozorují: $\boxed{x-1 < \lfloor x\rfloor \le x}$

$$x^2-1+1 \le \lfloor x^2\rfloor + 1 \le x^2+1$$

$$1 = \frac{x^2+1}{x^2+1} \le \underbrace{\frac{x^2+1}{\lfloor x^2\rfloor+1}}_{\to 1 \text{ V. } 2.10.} \le \frac{x^2+1}{x^2} = 1+\frac{1}{x^2} \to 1$$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\cos x = -\infty$

$x+\cos x \le x+1 \to -\infty$ pro $x\to-\infty$

ačkoliv: $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$ neexistuje.

**Věta 2.11** Nechť $f(x)$ je monotónní na intervalu $(a,b)$. Pak existují

$$\lim_{x\to a+} f(x), \quad \lim_{x\to b-} f(x).$$

dk. BÚNO $f(x)$ neklesající; dokážeme existenci $\lim_{x\to b-} f(x)$.

položme $M = f((a,b)) = \{y \in \mathbb{R};\ \exists x \in (a,b) \text{ tak, že } f(x) = y\}$.

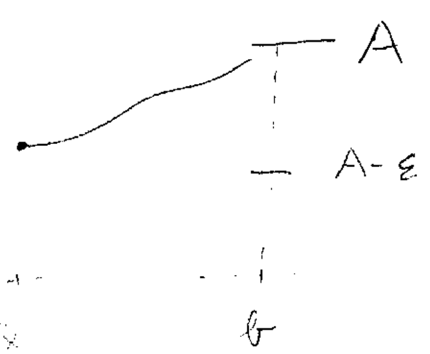
1. $M$ shora omezená (tj. $f(x)$ shora omezená na $(a,b)$)

Věta A.4 $\Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}$ tak, že $A = \sup M$.

ukážeme, že $f(x) \to A$ pro $x \to b-$.

$\varepsilon > 0$ dáno: $A - \varepsilon < A$; 2. vl. suprema: $\exists \tilde{y} \in M$ tak, že $\tilde{y} > A - \varepsilon$

označme $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, kde $\tilde{x} \in (a,b)$




zvol $\delta > 0$ tak malé, že $\tilde{x} \notin P_-(b,\delta)$

tedy $\tilde{x}$ leží nalevo od $P_-(b,\delta)$.

$x \in P_-(x,\delta) \Rightarrow x > \tilde{x}$

$f(x)$ neklesající: $f(x) \geq f(\tilde{x}) > A - \varepsilon$

na druhé straně: $f(x) \leq A$ pro $\forall x \in (a,b)$ (z definice $A$).

tedy $\quad A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon$

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. $M$ shora neomezená: ukážeme, že $f(x) \to \infty$ pro $x \to b-$.

$K > 0$ dáno: $M$ neomezená: $\exists \tilde{y} \in M$ tak, že $\tilde{y} > K$

tj. ex. $\tilde{x} \in (a,b)$ tak, že $f(\tilde{x}) > K$.

zvol $\delta > 0$ jako předtím:

$x \in P_-(b,\delta) \Rightarrow x > \tilde{x}$, a tedy

$f(x) \geq f(\tilde{x}) > K$.

[illegible]

Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v $x_0$ zprava (resp. zleva), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in \mathcal{U}_+(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)\right]$$

respektive

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in \mathcal{U}_-(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)\right].$$

---

Ekvivalentní zápisy: (spoj. zprava)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[f\left(\mathcal{U}_+(x_0, \delta)\right) \subset \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)\right]$$

nebo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x_0 \le x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right].$$

## Věta 2.12 [illegible]

(1) $f(x)$ je spojitá v $x_0$ zprava právě když $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$

(2) $f(x)$ je spojitá v $x_0$ zleva právě když $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$

(3) $f(x)$ je spojitá v $x_0$ právě když je tam spojitá zleva i zprava.

---

Dk. (1), (2) ... analogicky jako Věta 2.5 (použij $\mathcal{U}_+(x_0, \delta)$, $\mathcal{P}_+(x_0)$ místo $\mathcal{U}(x_0)$, $\mathcal{P}(x_0)$).

(3) $f(x)$ spoj. v $x_0$

$$\Updownarrow \text{ V. 2.5}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Updownarrow \text{ V. 2.2}$$

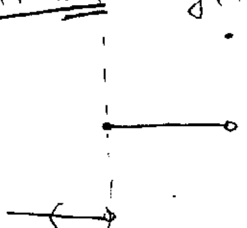
$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ a zároveň $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$

$\Updownarrow$ (1) $\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$f(x)$ spoj. v $x_0$ zprava $\qquad\qquad f(x)$ spoj. v $x_0$ zleva.

---

**Příklad.** $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ; $f(0) = 0$;



$f(x) = 0$ na $\mathcal{P}_+(0, \frac{1}{2})$; $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$

$f(x) = -1$ na $\mathcal{P}_-(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1.$

} spojitá v 0 zprava, nespojitá zleva...

Definice: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, a $f(x): I \to \mathbb{R}$. Říkáme, že $f(x)$ je spojitá (na) $I$, jestliže pro každé $x_0 \in I$ platí:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)\right].$$

Poznámka: pro intervaly $(a,b)$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$

$a, b$ nazýváme krajní body, ostatní vnitřní.

krajní bod může, ale nemusí být prvkem intervalu.

**pozorujeme:** $x_0 \in I$ je vnitřní $\Leftrightarrow \exists \delta>0$ tak, že $\mathcal{U}(x_0,\delta) \subset I$.

Věta 2.13. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a<b$, a $f(x): I \to \mathbb{R}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $f(x)$ je spojitá v $I$

(2) $f(x)$ je spojitá v každém vnitřním $x_0 \in I$,
pokud levý krajní bod $I$ je prvkem $I$, je v něm spojitá zprava,
a pokud pravý krajní bod $I$ je prvkem $I$, je v něm spojitá zleva.

(3) $f(x)$ je spojitá zprava v každém $x_0 \in I$, který není pravý krajní,
a je spojitá zleva v každém $x_0 \in I$, který není levý krajní.

Dk. (1) dle definice: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)\right]$

$x_0 \in I$ vnitř.: $\mathcal{U}(x_0,\delta) \cap I = \mathcal{U}(x_0,\delta)$ pro $\delta$ dost malé!

tj. formule říká: $f(x)$ je spojitá v $x_0$.

$x_0 \in I$ je levý kraj.: $\mathcal{U}(x_0,\delta) \cap I = \mathcal{U}_+(x_0,\delta)$ pro $\delta$ malé!

tj. formule říká: $f(x)$ spojitá zprava.

tedy $(1) \Leftrightarrow (2)$.

ukažme $(2) \Leftrightarrow (3)$: $x_0 \in I$ vnitřní: (2): $f(x)$ spojitá v $x_0$

vnitřní není krajní: (3): $f(x)$ spojitá zleva i zprava

$\Updownarrow$

$f(x)$ spojitá V. 2.12 (3).

[illegible]

leng trong nem (3) nhé : (4) [illegible] to [illegible]

[illegible]:

**Věta 2.14.** Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v intervalu $I$. Potom $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, jsou spojité v $I$. Jestliže $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$, je $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojité v $I$.

Dk.: ukážeme $f(x)\cdot g(x)$ spojité v $I$.

V. 2.13. (3) stačí: $\lim_{x \to x_0-} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$$

pro každé $x_0 \in I$ který není levý krajní resp. není pravý krajní.

nechť $x_0 \in I$ není levý krajní:

V. 2.13: $f(x) \to f(x_0)$, $g(x) \to g(x_0)$ pro $x \to x_0-$ (spojitost $f(x), g(x)$).

$$f(x)g(x) \to f(x_0)g(x_0).$$

**Věta 2.15** (Spojitost superpozice.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $I$, $g(y)$ spojité v $J$, kde $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly. Nechť $f(I) \subset J$. Potom $(g \circ f)(x)$ je spojité v $I$.

cíl: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow g(f(x)) \in \mathcal{U}(g(f(x_0)), \varepsilon)\right]$

$\varepsilon > 0$ dáno; označ. $y_0 = f(x_0) \in J$

$g(y)$ spojité $\exists \eta > 0$: $\left[y \in \mathcal{U}(y_0, \eta) \cap J \Rightarrow g(y) \in \mathcal{U}(g(y_0), \varepsilon)\right]$

$f(x)$ spoj. v $I$: $\exists \delta > 0$, $\left[x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0), \eta)\right]$

$\{f(x); x \in I\} = f(I) \subset J$: a tedy $f(x) \in \mathcal{U}(y_0, \eta) \cap J$

$$x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow g(f(x)) \in \mathcal{U}(\underbrace{g(y_0)}_{g(f(x_0))}, \varepsilon).$$

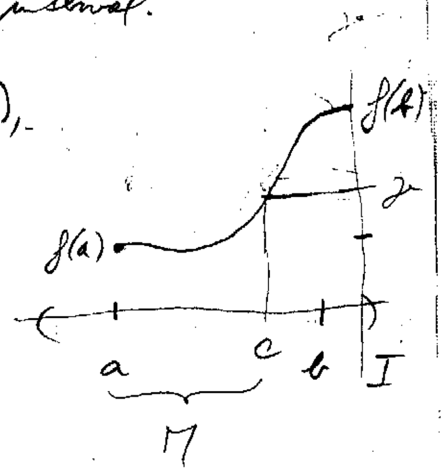
**Poznámka.** Ihned z definice plyne:

$f(x)$ spojité v $I$, a $\tilde{I} \subset I$, $\tilde{I}, I$ intervaly

$\Rightarrow f(x)$ spojité v $\tilde{I}$.

Věta 2.16 (Darbouxova (darbuova))

Nechť $f(x)$ je spojitá na $I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť $\gamma$ leží mezi $f(a), f(b)$, kde $a, b \in I$. Pak mezi $a, b$ leží $c$ takové, že $f(c) = \gamma$.




Dk: BÚNO: $a < b$, $f(a) < f(b)$.

$$M := \{x \in [a,b];\ f(x) < \gamma\}.$$

$M \neq \emptyset$, neboť $a \in M$; shora omezená číslem $b$.

Věta A.4: $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $c = \sup M$.

zjevně $a \leq c \leq b$; i.e. $c$ leží mezi $a, b$.

ukážeme: $f(c) = \gamma$.

sporem: 1. $f(c) < \gamma$: $\Rightarrow c < b$.

$\gamma$, $\varepsilon$, $f(c)$

vezmi $\varepsilon > 0$ tak, $\gamma > f(c) + \varepsilon$

$f(x)$ spojitá v $c$ zprava: (neboť $c < b$).

$\exists \delta > 0$ tak, že $x \in \mathcal{U}_+(c, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(c), \varepsilon)$

speciálně: $x \in [c, c+\delta) \Rightarrow \underline{f(x)} < f(c) + \varepsilon \leq \gamma$

tedy $[c, c+\delta) \subset M$.

$c = \sup M$; spor.

2. $f(c) > \gamma$: $\exists \varepsilon > 0$ tak, že

$f(c)$, $\varepsilon$, $\gamma$

$\gamma < f(c) - \varepsilon$.

$f(x)$ spojitá v $c$ zleva:

$\exists \delta > 0$ tak, že $x \in \mathcal{U}_-(c, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(c), \varepsilon)$

speciálně: $x \in (c-\delta, c] \Rightarrow f(x) > f(c) - \varepsilon > \gamma$

i.e. $M \cap (c-\delta, c] = \emptyset$

spor s 2. vlastností suprema!!

$c - \delta < c = \sup M$:

Poznámka: Neprázdná $M \subset \mathbb{R}$ má supremum v $\mathbb{R}^*$

/ $M$ shora omezená: má supremum v $\mathbb{R}$ (věta A.4)

\ $M$ shora neomezená: $\sup M = \infty$.

Lemma 2.2. (Charakterizace intervalu)

Nechť (neprázdná) $M \subset \mathbb{R}$ má následující vlastnost:

(*) Jsou-li $\alpha, \beta \in M$ a $\gamma$ leží mezi $\alpha, \beta$, pak také $\gamma \in M$

Potom $M$ je interval.

Dk.: polož $a = \sup M$, $b = \inf M$; (zřejmě $a, b \in \mathbb{R}^*$ existují)

tedy $M \subset [a, b]$.

ukážeme, že naopak $M \supset (a, b)$.

zvol $\gamma \in (a, b)$ libovolné:

$\gamma < b = \sup M$: 2. vl. suprema:

$\exists \beta \in M$ tak, že $\gamma < \beta$.

podobně: $\alpha > a = \inf M$: 2. vl. infima:

$\exists \alpha \in M$ tak, že $\alpha < \gamma$.

tj. $\alpha, \beta \in M$; $\gamma$ leží mezi nimi

$(*) \Rightarrow \gamma \in M$.

tedy $(a, b) \subset M \subset [a, b]$.

tedy $M$ je jeden z případů

$(a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$.

tedy je to interval.

Důsledek: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f(x)$ je spojitá v $I$.
Potom $f(I)$ je také interval.

dk: $M = f(I)$ má vlastnost $(*)$ z L. 2.2:

$\alpha, \beta \in M$, $\gamma$ leží mezi $\alpha, \beta$.

tj: $\exists\, a, b \in I$ tak, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.

V. 2.16: $\exists\, c \in I$ (dokonce $c$ mezi $a, b$) tak,
že $f(c) = \gamma$. tj. $\gamma \in M$.

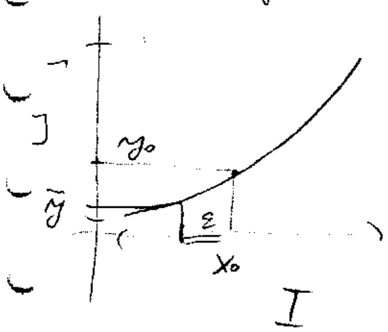
tedy $M = f(I)$ je interval. (Spojitý obraz intervalu je interval.)

Věta 2.17. (O inverzní funkci).
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v $I$.
Označ $J = f(I)$. Potom $J$ je interval, $f(x): I \to J$ je vzájemně jednoznačná a $f_{-1}(y): J \to I$ je spojitá a ryze monotónní.

dk. $J$ interval $\Leftarrow$ předchozí důsledek.
$f(x)$ vzájemně jednoznačná $\Leftarrow$ ano, neboť je ryze monotónní.
$f_{-1}(y)$ .. ryze monotónní $\Leftarrow$ ano, neboť $f(x)$ je taková.

zbývá: $f_{-1}(y): J \to I$ je spojitá.

BÚNO: $f(x)$ rostoucí. $y_0 \in J$ není levý krajní bod $J$
$\Rightarrow f_{-1}(y)$ spojitá v $J$ zleva



chci: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[y \in \mathcal{U}(y_0, \delta) \cap J \Rightarrow f_{-1}(y) \in \mathcal{U}(f_{-1}(y_0), \varepsilon)\right]$

$\varepsilon > 0$ dáno: BÚNO:
$\varepsilon$ tak malé, že $x_0 - \varepsilon \in I$
(neboť $x_0$ není levý krajní)

Polož $\tilde{y} = f(x_0 - \varepsilon)$; tedy $\tilde{y} < y_0 = f(x_0)$.

označ. $\delta = y_0 - \tilde{y}$.
$y \in (\tilde{y}, y_0] = \mathcal{U}_+(y_0, \delta) \cap J$
$\Rightarrow f_{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0] \subset \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$.

Věta 2.17. (O inverzní funkci.)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v $I$. Označ $J := f(I)$. Potom $J$ je interval, $f(x): I \to J$ je vzájemně jednoznačné a $f_{-1}(y): J \to I$ je spojitá, ryze monotónní.

---

monotónní ← rostoucí (klesající).

---

Dk.: $J$ interval: viz předchozí důsledek.

BÚNO: $f$ klesající $(x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

prosté: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

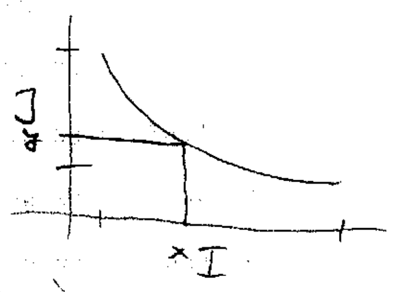
každopádně $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$f: I \to J$ prosté, na

lze zapsat $f_{-1}: J \to I$

$f_{-1}(y) = x$

$f(x) = y$.




ukážeme: $f$ klesající, spojité.

$y_1 < y_2 \in J$: $f_{-1}(y_1) = x_1$

$f_{-1}(y_2) = x_2$

chtě $x_2 > x_1$; ?? $x_2 \leq x_1 \Rightarrow$

$y_2 = f(x_2) \geq f(x_1) = y_1$

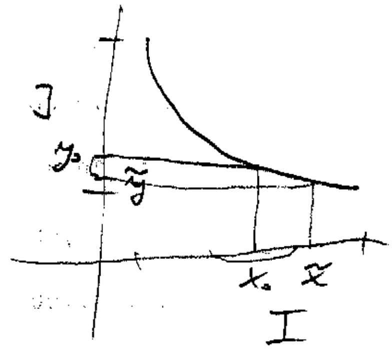
---

chtě $f_{-1}(y_1) > f_{-1}(y_2)$ ?? $f_{-1}(y_1) \leq f_{-1}(y_2)$

spojité: v $J$ ... Věta 2.13: stačí ukázat $\forall y_0 \in J$

($y_0$ není levý krajní $\Rightarrow$ $f_{-1}$ spoj. v $y_0$ zleva
 —"— pravý —"— —"— zprava.

$y_0 \in J$ ; není levý krajní:




$\exists\, \tilde{y} \in J;\ \tilde{y} < y_0$

označme: $x_0 = f_{-1}(y_0)$

$\tilde{x} = f_{-1}(\tilde{y})$ ; pak $\tilde{x} > x_0$

cíl: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[ y \in \mathcal{U}(y_0, \delta) \cap J \Rightarrow f_{-1}(y) \in \mathcal{U}(f_{-1}(y_0), \varepsilon) \right].$

$\varepsilon > 0$ dáno: BÚNO $\varepsilon$ tak malé, že

$$x_0 + \varepsilon \in I$$

$x_0$ není pravý krajní!!
$(\exists\, \tilde{y} \in J, \tilde{y} < y_0 \Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in I; \tilde{x} < x_0)$.

$f(x_0 + \varepsilon) < f(x_0) = y_0$ ;

označ: $\delta := y_0 - f(x_0 + \varepsilon) > 0$.

pokud: $y \in \mathcal{U}_-(y_0, \delta) = \cancel{[y_0, y_0 + \delta)} = (y_0 - \delta, y_0]$

$= \cancel{(f(x_0), f(x_0+\varepsilon))} = (f(x_0 + \varepsilon), x_0]$

$\Rightarrow f_{-1}(y) \in [\underbrace{x_0}_{= f_{-1}(y_0)}, x_0 + \varepsilon) \cancel{\subset [f_{-1}(y_0)} \subset \mathcal{U}(f_{-1}(y_0), \varepsilon).$

V.2.11 [illegible]

$\Rightarrow J$ je interval; $f^{-1}(y): J \to I$ spojité, ryze monotónní.

---

**Důsledek:** Důkaz Věty B. (odmocnina)

**$n \in \mathbb{N}$ sudé:** položme $f(x) = x^n$; $I = [0, \infty)$. ; $f(x)$ rostoucí v $I$.

$f(I) = J = [0, K)$ ; protože $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, je zřejmě $K = \infty$.

$f(0) = 0$ ; $J = [0, \infty)$

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ vzájemně jednoznačné:

tj. $\forall y \in [0, \infty)\ \exists!\, x \in [0, \infty)$ takové, že $x^n = y$;

neboli: $x = \sqrt[n]{y}$.

---

navíc: $\sqrt[n]{y}$ je rostoucí, spojitá v $[0, \infty)$.

tj. $\sqrt[n]{y}$ spojitá v $\forall x_0 \in (0, \infty)$
a je spojitá v $0$ zprava. $\Big\}$ V.2.13

**$n \in \mathbb{N}$ liché:** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^n$ spojité, rostoucí v $I$.

rostoucí: $x < y \Rightarrow x^n < y^n$.

(a) $0 \le x < y$ jasné

(b) $x < 0 \le y$ : $x^n < 0$; $y^n \ge 0$ jasné

(c) $x < y \le 0$:

$x^2 > y^2$

$x^3 < y^3$

: pro $n$ liché $x^n < y^n$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n = \pm\infty$: $\Rightarrow J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vzájemně jednoznačné.

$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists!\, x \in \mathbb{R})\,[x^n = y]$; značíme $x = \sqrt[n]{y}$

$\sqrt[n]{y}$ je spojité v $\mathbb{R}$.

**Lemma 2.3** (1) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

(2) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(-\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Rovnost limit chápeme takto: existuje-li jedna z nich, existuje i druhá a rovnají se.

dk. (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[x\in P(-\infty,\delta) \Rightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon)\right]$

$$x < -\frac{1}{\delta}$$

$\lim\limits_{y\to 0-} f\left(\frac{1}{y}\right) = A$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[y\in P_-(0,\delta) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)\in U(A,\varepsilon)\right]$

$$y\in(-\delta,0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{1}{y}} \in \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right).$$

Poznámka:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$: $(\forall K>0)(\exists \delta>0)\left[x\in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) > K\right]$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists K>0)\left[x>K \Rightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon)\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists L<0)\left[x<L \Rightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon)\right]$.

Poznámka: Pozor na chybné „částečné" limity.

① $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x}}$; $\quad \dfrac{\overset{\to 1}{\frac{x}{x+1}} - \frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{po dosazení}}{\boxed{\underset{\to}{=}}} \dfrac{1-\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{(x-1)-x}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-x}{x-1}$

správně: $\dfrac{\frac{x(x-1-(x+1))}{x^2-1}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-2x^2}{x^2-1} \to \underline{\underline{-2}}. \qquad = \dfrac{-1}{1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}} \to -1.$

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{\to 1}{\frac{x}{\sin x}} - \cos x}{x^2} \;\cancel{=}\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ špatně

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\sin x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)}{x^3 + \dots} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Poznámky $F(x): I \to \mathbb{C}$;

složením sdružené fce: $f_1(x): I \to \mathbb{R}$

$f_2(x): I \to \mathbb{R}$

kde $F(x) = f_1(x) + i f_2(x)$

nazývá $f_1(x) = \operatorname{Re} F(x)$ reálná

$f_2(x) = \operatorname{Im} F(x)$ imaginární } část $F(x)$.

---

**Def.:** $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = A \in \mathbb{C}$, pokud $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{Re} F(x) = \operatorname{Re} A$

$\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{Im} F(x) = \operatorname{Im} A$.

$F(x): I \to \mathbb{C}$ je spojité v $I$, pokud $\operatorname{Re} F(x)$, $\operatorname{Im} F(x)$ jsou spojité v $I$.

---

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta); \quad \text{pro } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$e^{ax} = e^{\alpha x}\left[\cos\beta x + i \sin\beta x\right] \quad \text{zobrazení z } \mathbb{R} \text{ do } \mathbb{C}.$$

máme i větu o aritmetice limit: $F(x), G(x): P(x_0) \to \mathbb{C}$.

Nechť $F(x) \to A$, $G(x) \to B$ pro $x \to x_0$; $A, B \in \mathbb{C}$.

Potom $F(x) \cdot G(x) \to A \cdot B$.

---

$A = a_1 + i a_2$; $B = b_1 + i b_2$.

$F(x) = f_1(x) + i f_2(x)$; $G(x) = g_1(x) + i g_2(x)$.

$$F(x) G(x) = \left(f_1(x) + i f_2(x)\right) \cdot \left(g_1(x) + i g_2(x)\right)$$

$$= \underbrace{f_1(x) g_1(x) - f_2(x) g_2(x)}_{\downarrow} + i \left\{ f_1(x) g_2(x) + f_2(x) g_1(x) \right\}$$

$$\underbrace{a_1 b_1 - a_2 b_2}_{= \operatorname{Re}(AB)} + i \left\{ a_1 b_2 + a_2 b_1 \right\}$$

$\operatorname{Re}(AB)$ $\qquad \operatorname{Im}(A \cdot B)$.