Cvičení 86: Najděte nutné a postačující podmínky pro kompaktnost množiny M v diskrétním metrickém prostoru)! [M je kompaktní, právě když je konečná.]

Cvičení 87: Rozhodněte, zda je součin dvou kompaktních metrických prostorů (P, ρ), (Q, σ) také kompaktní! [ano]

V následujících čtyřech cvičeních sestrojte vždy vhodné příklady:

Cvičení 88: Najděte prostor (P, ρ) a funkci f spojitou na (P, ρ), která není omezená na P! Prostor (P, ρ) není zřejmě kompaktní: Lze najít funkci s analogickými vlastnostmi na libovolném *nekompaktním* (P, ρ)?

Cvičení 89: Nechť prostor (P, ρ) *není* kompaktní. Sestrojte omezenou spojitou funkci na (P, ρ), která není stejnoměrně spojitá na (P, ρ)!

Cvičení 90: V každé oblasti $G \subset \mathbb{R}^m$ lze její libovolné dva body spojit lomenou čarou, která leží celá v G. Lze také spojit spojit lomenou čarou v $\overline{G}$ libovolné dva body z $\overline{G}$? [ne]

Cvičení 91: Je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ oblast a $x \in G$, lze nalézt ke každému bodu $\zeta \in \overline{G}$ lomenou čáru která ho spojuje s x a která leží celá kromě bodu ζ v G? [ne]

Cvičení 92: * Seznamte se s konstrukcí spojitého zobrazení f intervalu $[\,0, 1\,]$ *na* čtverec $[\,0, 1\,] \times [\,0, 1\,]$ (jde o tzv. Peanovu křivku). Lze sestrojit f tak, aby bylo prosté? [ne; odpověď lehce dostaneme pomocí souvislosti]

Vrátíme se k cvičením na řešení diferenciálních rovnic:

Cvičení 93: Zjistěte, zda následující funkce tvoří lineárně nezávislý systém na $\mathbb{R}$ a svá tvrzení *dokažte*:

(a) $\{1,\ x^2,\ x^5\}$, (b) $\{\exp x,\ \exp 2x,\ \exp 3x\}$,

(c) $\{5,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x\}$, (d) $\{x \exp x,\ x^2 \exp x,\ x^3 \exp x\}$,

(e) $\{\sin x,\ \cos x,\ \cos 2x\}$.

[Všechny systémy kromě (c) jsou nezávislé.]

Cvičení 94: Zjistěte, zda jsou funkce $\{1,\ \arcsin x,\ \arccos x\}$ lineárně nezávislé na intervalu $[\,-1, 1\,]$!
[Funkce jsou lineárně závislé.]

Cvičení 95: Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ funkce, jsou lineárně závislé funkce

$$(*) \qquad f\,,\ g\,,\ |f|\,,\ |g|\,,\ f^+,\ f^-,\ g^+,\ g^-,\ \max(f, g)\,,\ \min(f, g)\,?$$

Jaká je minimální a maximální dimenze lineárního obalu všech funkcí $(*)$ v závislosti na volbě f a g? [Jsou; 0 při $f = g \equiv 0$ a 6 např. pro x a x^3]

Cvičení 96: Určete obecná řešení rovnic:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

[$y(x) = c_1 \exp(-2x) + c_2 x \exp(-2x)$; $y(x) = c_1 \exp x + c_2 \exp 2x$;
$y(x) = c_1 \exp 3x \cos 2x + c_2 \exp 3x \sin 2x$]

Cvičení 97: Řešte rovnici $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$; zkuste funkci $f(x) = 1/x$!
[$y(x) = c_1x^3 + c_2/x + x^4$]

Cvičení 98: Určete obecná řešení rovnic:

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$
$$y^{(4)} - y = y'''' - y = 0$$
$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 5y^{(3)} - 2y' + 5y = 0$$

[$y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + c_3\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$; $y(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$; $y(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{x}(c_3 + c_4\cos 2x + c_5\sin 2x)$]

Cvičení 99: Určete řešení rovnice $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$. [$y(x) = \mathrm{e}^{x}(1 + x)$]

Cvičení 100: Určete řešení následujících rovnic, vyhovující daným podmínkám:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y &= 0, \qquad && y(0) = 0,\ y(1) = 0 \\ y'' - 3y' + 2y &= 0, && y(0) = 2,\ y'(0) = 3 \\ y'' - 6y' + 13y &= 0, && y(0) = 1,\ y(2\pi) = \exp(6\pi) \\ y'' - 4y' + 3y &= 0, && y(0) = 6,\ y'(0) = 10 \end{aligned}$$

[$y(x) = 0$; $y(x) = \exp x + \exp 2x$; $\ldots$]

Cvičení 101: Nalezněte obecná řešení diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' &= 3x\exp -3x\,, \qquad && [\, c_1 + (c_2 - x^2/2 - x/3)\exp -3x \,] \\ y'' + y &= 4x\cos x\,, && [\, c_1\cos x + c_2\sin x + x\cos x + x^2\sin x \,] \\ 7y'' - y' &= 14x, && [\, c_1 + c_2\exp(x/7) - 7x^2 - 98x \,] \\ y'' - y' &= \exp x\sin x, && [\, c_1 + c_2\exp(x) - (1/2)\exp x)(\cos x + \sin x) \,] \end{aligned}$$

Cvičení 102: Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + y' + y = (x + x^2)\,\exp x\,!$$

$$\left[\, \big(c_1\cos(\sqrt{3}/2)x + c_2\sin(\sqrt{3}/2)x\big)\exp(-x/2) + \frac{\exp x}{3}(x^2 - x + 1) \,\right]$$

Cvičení 103: Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 2y' + y = x^2\mathrm{e}^{-x}\cos x$!

$$\left[\, y(x) = \frac{x^4}{24} + c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + c_5\right) \,\right]$$

Cvičení 104: Řešte rovnice:

$$y'' - 6y' + 9y = 25\,\mathrm{e}^{x}\sin x\,, \qquad y'' + y = 4x\cos x\,,$$
$$y''' - 4y' = x\mathrm{e}^{2x} + \sin x + x^2\,!$$

[$y(x) = (c_1 + c_2x)\,\mathrm{e}^{3x} + (4\cos x + 3\sin x)\,\mathrm{e}^{x}$; $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x^2\sin x + {}$ $+ x\cos x$; $y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-2x} + (\cos x)/5 - x^3/12 - x/8 + \mathrm{e}^{2x}(2x^2 - 3x)/32$.]

Cvičení 105: Řešení některých typů rovnic lze převést na řešení rovnic s konstantními koeficienty. Tak např. *Eulerova rovnice*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0\,,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, přejde po substituci

$$x = \mathrm{e}^t\,, \qquad \text{resp.} \qquad t = \log x$$

na rovnici s konstantními koeficienty. Proveďte experiment s rovnicí

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0\,.$$

Popsaným způsobem snadno naleznete její obecné řešení

$$y = \frac{c_1 + c_2 \log x}{x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Cvičení 106: Řešte rovnici

$$x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0\,.$$

[$y(x) = \big(c_1 \cos(2\log x) + c_2 \sin(2\log x)\big)/x\,,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$]

Nechali jsme stranou rovnice „typu $y' = f(x)g(y)$“, tj. se separovanými proměnnými. Jimi se budete zabývat převážně na cvičení.

Cvičení 107: Často naleznete ve sbírkách formulaci úlohy tvaru: Řešte rovnici $(1+y^2)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$! S touto konvencí se setkáme i dále.
[$y(x) = \operatorname{tg}\log(cx),\ c > 0.$]

Cvičení 108: Řešte rovnici $(1 + \exp x) y y' = \exp x$!
[$y(x) = \pm(\log(c + \exp x)^2)^{1/2}.$]

Cvičení 109: Řešte rovnici $(1+y^2)\,\mathrm{d}x + (1+x^2)\,\mathrm{d}y = 0$!
[„implicitní“ popis řešení $x + y = c(1 - xy),\ c \in \mathbb{R}.$]

Cvičení 110: Najděte řešení rovnice $y' \sin x - y \log x = 0$, které vyhovuje počáteční podmínce $y(\pi/2) = \mathrm{e}$! Existuje řešení vyhovující počáteční podmínce $y(\pi/2) = 1$?
[$y(x) = \exp(\operatorname{tg}(x/2)),\ x \in (-\pi, \pi)$; ano, $y(x) = 1.$]

Cvičení 111: Řešte rovnici $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$!
[$\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = c,\ c > 2$]

Cvičení 112: Nalezněte řešení rovnice

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,$$

které vyhovuje podmínce $y(0) = 1$!
[$y(x) = (1 + \log(1 - x^2))^{-1}$]

Cvičení 113: Řešte rovnici $y'' = 2y^3$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$!
[Řešení: $y(x) = (1-x)^{-1}$; je nutno *včas* využít počátečních podmínek.]

Řada rovnic lze převést na tvar, ve kterém ji snadno rozřešíme jako rovnice, které jsme již řešili. S některými se seznámíme:

Rovnice s homogenní pravou stranou, tj. rovnice, na jejíž pravé straně je homogenní funkce proměnných x, y stupně 0. V tom případě je $f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$ a po dělení x má pravá strana rovnice tvar $g(y/x)$.

Cvičení 114: Řešte rovnici $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$! Návod: úpravou přecházíme k rovnici „v y/x" a převedeme ji tak na tvar

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\,;$$

provedeme substituci $u = y/x$. Pak $y' = xu' + u$ a rovnice po dosazení přejde na tvar $xu' = \sqrt{1-u^2}$. [$y = x \sin \log(cx)$, $\exp(-\pi/2) \le cx \le \exp(\pi/2)$; je třeba ověřit, zda není $x = 0$ (jako funkce y) řešením (není) a zda funkce $y = \pm x$ nejsou řešeními (jsou).]

Cvičení 115: Řešte rovnici $y' = x/y + y/x$!
[$y^2 = x^2(c + \log x^2)$]

Cvičení 116: Řešte rovnice

$$\text{(a)}\quad y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}\,, \qquad \text{(b)}\quad 2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)\,!$$

[(a) $y^3 = c(y^2 - x^2)$, (b) $y^2 = cx \exp(x^2/y^2)$]

Cvičení 117: Najděte řešení rovnice (s počáteční podmínkou)

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}\,, \qquad y(1) = -1\,.$$

[$y(x) = -x$]

Rovnice „typu $y' = f(ax + by + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$"

Cvičení 118: Řešte rovnici $y' = (x + y - 2)^{-1}$! Návod: použijeme substituci $u = ax + by + c$, při níž $u' = a + by'$; úpravou dostaneme rovnici se separovanými proměnnými. V řešeném případě $u = x + y - 2$ je $u' = 1 + y'$. [„implicitně": $y - c = \log|x + y - 1|$. Z vyloučeného případu $u + 1 = 0$ dostaneme $y = 1 - x$ a zjistíme, zda není řešením (je); obecné řešení lze eventuálně zapsat ve tvaru $c \exp y = x + y - 1$, $c \in \mathbb{R}$. Užíváme konvenci o „céčkách"!]

Cvičení 119: Řešte rovnici $y' = 3x - 2y + 5$ s počáteční podmínkou $y(1) = 0$!
[$y = (1/4)(c \exp(-2x) + 6x + 7)$]

Cvičení 120: Řešte rovnici $y' = (x + 2y)^{-1}$!
[$x + 2y + 2 = 3 \exp y$]

Rovnice „typu $y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$ a $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$"
Není-li splněna poslední podmínka, pak $u = a_2 x + b_2 y$ převede úlohu na předcházející případ.

Cvičení 121: Řešte rovnici $xy' + 2yy' - 3y' + 3x + 3y - 6 = 0$! Návod: upravíme rovnici na tvar

$$y' = \frac{-3x - 3y + 6}{x + 2y - 3}, \quad x + 2y - 3 \neq 0.$$

V obecnější rovině: při splnění podmínky o nenulovosti determinantu řešíme soustavu rovnic

$$a_1 k + b_1 l + c_1 = 0, \quad a_2 k + b_2 l + c_2 = 0,$$

a pak provedeme substituci $x = t + k$, $y(x) = u(t) + l$. Značíme-li $\dot{u}$ derivaci u podle t, je $y' = \dot{u}$, takže po dosazení dospějeme k rovnici

$$\dot{u} = f\Big(\frac{a_1 t + b_1 u}{a_2 t + b_2 u}\Big).$$

V řešené úloze je f identita (častý případ ve „školních úlohách").
[Řešením soustavy lineárních rovnic dostaneme

$$\dot{u} = \frac{-3t - 3u}{t + 2u} = \frac{-3 - 3u/t}{1 + 2u/t}.$$

Po „snadné námaze" lze dospět k řešení ve tvaru

$$2y^2 + 3x^2 + 4xy - 10x - 8y + 9 = c \exp\Big(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{2}\,\frac{x + y - 2}{x - 1}\Big)\Big)$$

s $c > 0$. Protože úpravou do typového tvaru jsme vnesli do úlohy další omezení, chybí nám ještě řešení tvaru $x = x(y)$]

Cvičení 122: Řešte rovnici $(x + y - 2)\,\mathrm{d}x = (y - x - 4)\,\mathrm{d}y$!
[$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = c$]

Cvičení 123: Řešte rovnici $(x + y + 1)\,\mathrm{d}x = (2x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y$!
[$x + 2y + 3\log|x + y - 2| = c$]

Cvičení 124: Řešte rovnice

$$\text{(a)} \quad y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}, \quad \text{(b)} \quad y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}.$$

[(a) $x^2 - xy + y^2 + x - y = c$; (b) $y^2 = x^2(c + \log x^2)$]