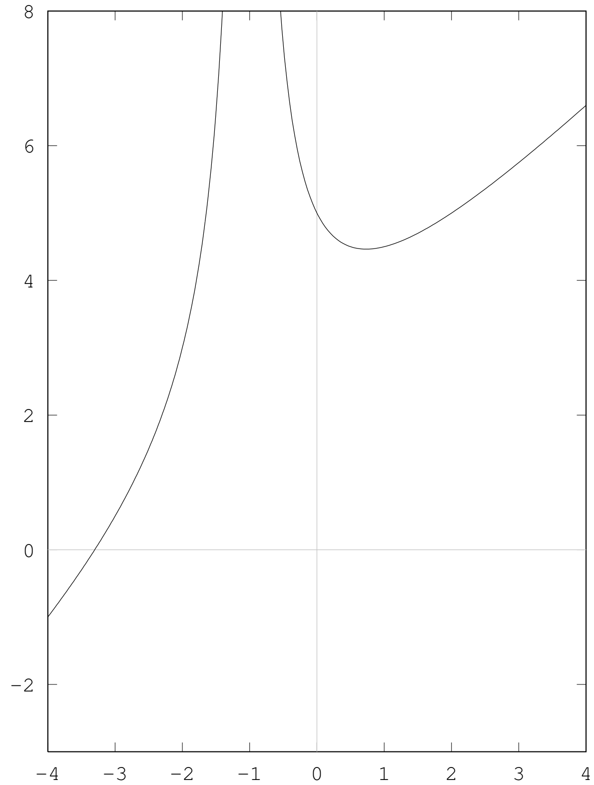
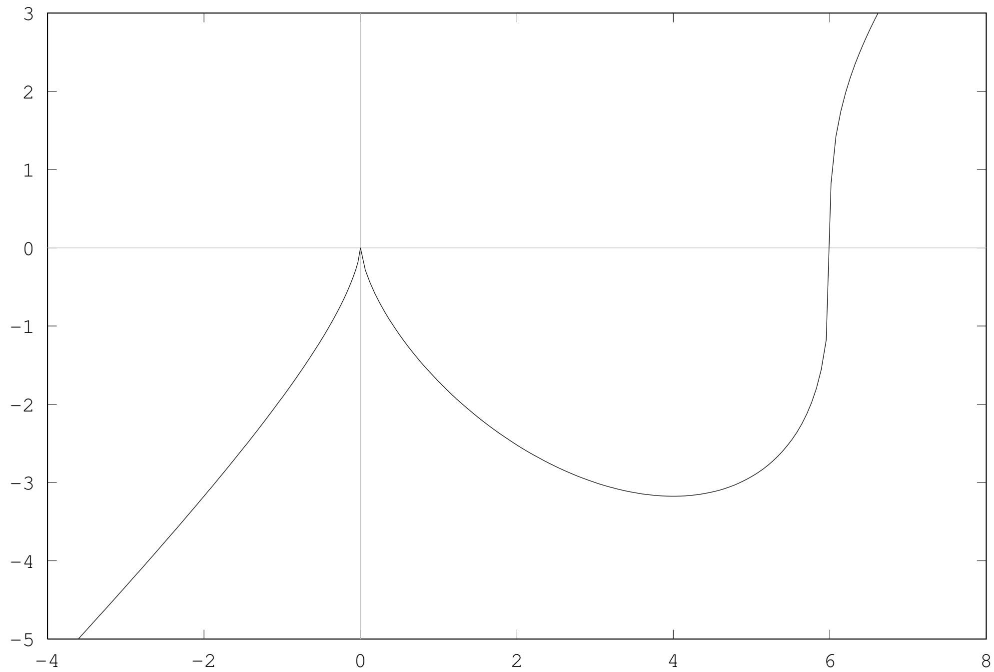
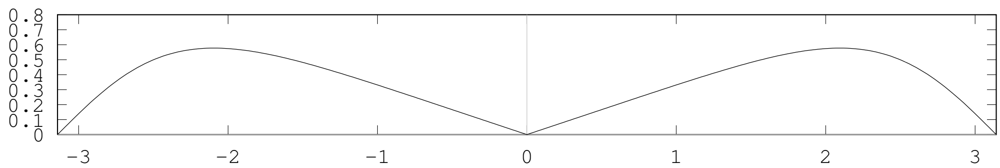
① $f(x) = x + 2 + \frac{1}{|x+1|}$. *Řešení:* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, spojitá v $\mathcal{D}(f)$. Žádné symetrie; $f(x) \to \pm\infty$ pro $x \to \pm\infty$; $f(x) \to +\infty$ pro $x \to -1$.
Derivace: $f'(x) = 1 - \frac{3\,\mathrm{sgn}(x+1)}{(x+1)^2}$ pro $\forall x \in \mathcal{D}(f)$. Kritický bod $x_0 = \sqrt{3} - 1$. Roste v $(-\infty, -1)$ a v $[x_0, +\infty)$, klesá v $(-1, x_0]$. Bod x_0 je ostré lokální minimum. Globální extrémy $\emptyset$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.
Konvexita: $f'(x)$ zřejmě roste v $(-\infty, -1)$ a v $(-1, +\infty)$, $f(x)$ je v těchto intervalech ryze konvexní. Inflexní body $\emptyset$. *Asymptoty.* $y(x) = x + 2$ pro $x \to \pm\infty$.



② $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$. *Řešení:* Spojitá v $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, žádné symetrie. Nulové body $x = 0$, 6; $f(x) \to \pm\infty$ pro $x \to \pm\infty$.
Derivace: $f'(x) = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$ pro $x \neq 0$ a 6; $f'(6) = +\infty$; $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$. Roste v $(-\infty, 0]$ a v $[4, +\infty)$, klesá v $[0, 4]$. Kritický bod $x = 4$ je ostré lokální minimum, bod $x = 0$ ostré lokální maximum (ovšem $f'(0)$ neexistuje). Globální extrémy $\emptyset$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.
Konvexita: $f''(x) = \frac{-8}{x(x-6)\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$ pro $x \neq 0$ a 6; ryze konvexní v $(-\infty, 0]$ a v $[0, 6]$, ryze konkávní v $[6, +\infty)$.
Asymptota: $y(x) = x - 2$ pro $x \to \pm\infty$.



③ $f(x) = \frac{|\sin x|}{2+\cos x}$. *Řešení:* Spojitá v $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, sudá, 2π-periodická. Nezáporná, omezená. Nulové body $x = k\pi$ jsou globální minima. Limity v $\pm\infty$ neexistují.
Derivace: $f'(x) = \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}\operatorname{sgn}(\sin x)$ pro $x \neq k\pi$; $f'_{\pm}(2k\pi) = \pm\frac{1}{3}$, $f'_{\pm}((2k+1)\pi) = \pm 1$. Kritické body $\pm 2\pi/3 + 2k\pi$ jsou globální maxima. Roste v $[0, 2\pi/3]$, klesá v $[2\pi/3, \pi]$ a dále analogicky. $\mathcal{H}(f) = [0, 1/\sqrt{3}]$.
Konvexita: Pro $x \in (0,\pi)$ je $f''(x) = \frac{2(\cos x-1)\sin x}{(2+\cos x)^3} < 0$, tedy $f(x)$ ryze konkávní v $[0,\pi]$, obecněji v $[k\pi, (k+1)\pi]$. Inflexní body $\emptyset$.



④ $f(x) = 4\exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)$ pro $x \neq 2$, $f(2) = 0$. *Řešení:* Spojitá v $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Žádné symetrie, $0 \leq f(x) \leq 1$, limita $f(x) \to 4/e$ pro $x \to \pm\infty$.

Derivace: (v grafu červeně) $f'(x) = 8\exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)$ pro $x \neq 0,\ 2$; $f'_{\pm}(0) = \mp 2$, $f'(2) = 0$. Roste v $(-\infty, 0]$ a v $[2, +\infty)$; klesá v $[0, 2]$. Globální maximum (minimum) v bodě 0 (v bodě 2), $\mathcal{H}(f) = [0, 4]$.

Konvexita: $f''(x) = 32\exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) \cdot \frac{1}{(x-2)^4} \cdot \left(\operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right) + 2 - x\right)$ pro $x \neq 0,\ 2$. Ryze konvexní v $(-\infty, 0]$ a v $[1, 3]$; ryze konkávní v $[0, 1]$ a v $[3, +\infty)$. Inflexní body 1 a 3.