A1. [10b] Rozhodněte, zda konverguje a zda absolutně konverguje řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-k}\sqrt{1+\frac{1}{k}}$$

A2. [10b] Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0+} \left(1+\sqrt{x}\right)^{h(x)} \qquad \text{kde } h(x) = \frac{1}{1-\sqrt{\sin x + 1}}$$

A1) $|a_k| = \frac{1}{k^2-k}\sqrt{1+\frac{1}{k}} \leq \frac{2}{k^2-k} \sim \frac{1}{k^2}$; $\sum_k \frac{1}{k^2}$ konv.,

ověření $\sim$: tedy $\sum a_k$ konv. abs.

$$\frac{\frac{2}{k^2-k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{2k^2}{k^2-k} = \frac{2}{1-\frac{1}{k}} \to 2 \text{ díky VoAL}$$

Pozn. $a_k = (-1)^k b_k$, kde $b_k = \frac{1}{k(k-1)} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{k}} \to 0$

... klesá

Leibniz $\Rightarrow \sum_k a_k$ konv., leč z Leibnize nevíme, zda abs

A2) $f(x) = \exp(g(x))$, kde $g(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{\sin x + 1}}$

$$1-\sqrt{\sin x+1} = \frac{1-(\sin x+1)}{1+\sqrt{\sin x+1}} = \frac{-\sin x}{1+\sqrt{\sin x+1}}$$

$$g(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \left(1+\sqrt{\sin x+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{(-x)} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$$

$P_1 \to 1$ dle VoLSF

vnější $\dfrac{\ln(1+y)}{y} \to 1$, $y \to 0$

vnitřní $\sqrt{x} \to 0$, $x \to 0+$

$\neq 0$, $x \in P_+(0)$

$P_2 \to 1$ ...

známá limita & VoAL

$P_3 \to 2$ ....

spojitost $\sqrt{y}$, $\sin y$ & VoAL

$P_4 = \dfrac{-1}{\sqrt{x}} \to -\infty$

limita typu $\dfrac{1}{0+}$ & VoAL

CELKEM

$g(x) \to 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-\infty) = -\infty$ dle VoAL

$f(x) \to 0$ dle VoLSF ... vnější fce

$e^y \to 0$, $y \to -\infty$

B1. [10b] Rozhodněte, zda konverguje a zda absolutně konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{\sqrt{k}+1}-\sqrt{\sqrt{k}-1}\right)$$

B2. [10b] Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(x^3-x^2)}{(e^x-1)^3}$$

B1) $a_k = (-1)^k b_k$, $b_k = \dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{k}+1}+\sqrt{\sqrt{k}-1}}$

... $b_k \to 0$, klesá; neboť $\sqrt{y} \to +\infty$ roste pro $y \to +\infty$

Leibniz $\Rightarrow$ $\sum a_k$ konv.

? abs. konv.... $|a_k| = b_k \sim \dfrac{1}{k^{1/4}}$, tedy $\sum |a_k|$ div.

ověření $\sim$: $\dfrac{|a_k|}{1/k^{1/4}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{k}}}{\sqrt{\sqrt{k}+1}+\sqrt{\sqrt{k}-1}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{k}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{k}}}} \to \dfrac{1}{2}$ ... spojitost $\sqrt{y}$ & VoAL

CELKEM: $\sum_k a_k$ konv. neabs.

B2) … typ „$\frac{0}{0}$" …

$$f(x) = \frac{\sin(x^3-x^2)}{x^3-x^2} \cdot \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^3 \cdot \frac{x^3-x^2}{x^3} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

$P_1 \to 1$ … VoLSF

vnější: $\frac{\sin y}{y} \to 1,\ y \to 0$

vnitřní: $x^3-x^2 \to 0,\ x \to 0-$ dle VoAL

$x^3-x^2 = x^2(x-1) \neq 0$ na $P_-(0,\delta),\ \delta>0$

$P_2 \to 1$ .. VoLSF … vnější: $g(y) = \frac{1}{y^3}$ spojité v $y=1$

vnitřní: $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ … známé limita

$P_3 = 1 + \frac{1}{(-x)} \to +\infty$

… VoAL & typ $\frac{1}{0+}$ … $(-x) > 0$ na $P_-(0)$

CELKEM: $f(x) \to 1 \cdot 1 \cdot (+\infty) = +\infty$

… VoAL