skupina Ⓐ

Vypočítejte limitu nebo ukažte, že limita neexistuje. Jednotlivé kroky podrobně odůvodňujte – mělo by být zřejmé, jakou větu používáte. Za známé považujte limity posloupností: n^k, $\sqrt[k]{n}$, a^n, n^k/a^n, kde $a > 0$ a $k \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}$$

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n + 3^n}{n^3 + n^2}$$

skupina Ⓑ

Vypočítejte limitu nebo ukažte, že limita neexistuje. Jednotlivé kroky podrobně odůvodňujte – mělo by být zřejmé, jakou větu používáte. Za známé považujte limity posloupností: n^k, $\sqrt[k]{n}$, a^n, n^k/a^n, kde $a > 0$ a $k \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{\sqrt{n-1} - n}{\sqrt{n^3}} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$b_n = n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{2^n}}\right)$$

(A1) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}$

čitatel: $\sqrt[3]{n} = n^{1/3} \to +\infty$ (známé limita)

jmenovatel: $\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1} = \dfrac{n-1-(n+1)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$

$$= \frac{-2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{-2}{+\infty} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \underline{\underline{0}}$$

dle: VoAL, spojitosti $\sqrt{x}$, známé limity $\sqrt{n} \to +\infty$.

tedy $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}} \to -\infty$, (limita typu $\frac{1}{0-}$)

$\Rightarrow a_n = \sqrt[3]{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}} \to +\infty \cdot (-\infty) = \boxed{-\infty}$ dle VoAL

(A2) $b_n = (-1)^n \underbrace{\dfrac{2^n+3^n}{n^3+n^2}}_{c_n}$; $(-1)^n$ ... nemá limitu

upravme: $c_n = \dfrac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \underbrace{\dfrac{3^n}{n^3}}_{\downarrow\, +\infty} \cdot \underbrace{\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1+\frac{1}{n}}}_{\downarrow\, \frac{0+1}{1+0}} \to \underline{\underline{+\infty}}$

růstové škály & VoAL

$b_{2n} = 1 \cdot c_{2n} \to +\infty$

$b_{2n+1} = (-1) \cdot c_{2n+1} \to -\infty$

tedy $\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n \nexists}$

B1 $\quad a_n = \underbrace{\frac{\sqrt{n-1} - n}{\sqrt{n^3}}}_{c_n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

upravíme: $c_n = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^3}} - \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \sqrt{\frac{n-1}{n^3}} - \sqrt{\frac{n^2}{n^3}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \to \sqrt{0} - \sqrt{0} = 0$$

dle VoAL a spojitosti $\sqrt{x}$.

$\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ .. nemá limitu, ale je omezená

$\Rightarrow \quad a_n = c_n \cdot \cos\frac{n\pi}{2} \to 0$ dle Věty 2.7 (mizející × omezená posloupnost)

B2 $\quad b_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{2}{2^n}}\right)$

upravíme: $\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{2}{2^n}} = \frac{1+\frac{2}{n} - \left(1+\frac{2}{2^n}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{2^n}}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{2^n}}}$

tedy $b_n = \frac{n - \frac{n^2}{2^n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{2^n}}} \longrightarrow \frac{+\infty - 0}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = +\infty$

dle VoAL, růstových škál, spojitosti $\sqrt{x}$