Nechť X je abstraktní množina, 2^X systém všech podmnožin X, $M^c = X \setminus M$ doplněk množiny M.

Definice. Systém $\mathcal{I} \subset 2^X$ nazveme *ideálem* (množin v X), jestliže

(i) $X \notin \mathcal{I}$

(ii) $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{I} \implies \bigcup_{j=1}^{k} M_j \in \mathcal{I}$

(iii) $M_1 \in \mathcal{I}$, $M_2 \subset M_1 \implies M_2 \in \mathcal{I}$

Jestliže navíc

(iv) pro každou $M \subset X$ je buď $M \in \mathcal{I}$ nebo $M^c \in \mathcal{I}$

pak $\mathcal{I}$ nazýváme *prvoideál*.

Příklady. Pojem ideálu je abstrakcí vlastnosti ,,být malá množina“:
① Pokud X je nekonečná množina, pak $\mathcal{I}_k = \{M \subset X;\ M \text{ je konečná } \}$ je ideál.
② Jestliže μ je úplná míra (obecněji vnější míra) na X, pak

$$\mathcal{I}_0 = \{M \subset X;\ M \text{ je měřitelná a } \mu(M) = 0 \ \}$$

tvoří dokonce σ-ideál – vlastnost (ii) platí i pro spočetná sjednocení
③ Obráceně, je-li $\mathcal{I}$ prvoideál podmnožin X, můžeme definovat

$$\nu(M) = \begin{cases} 0, & M \in \mathcal{I} \\ 1, & M^c \in \mathcal{I} \end{cases}$$

Lehce si rozmyslíme, že ν je konečně-aditivní míra (obecně není σ-aditivní). Zřejmě ν nabývá pouze hodnot 0 a 1 – tzv. dvouhodnotová míra.

Pozorování. Nechť $\mathcal{I}$ je ideál množin v X. Potom $\mathcal{I}$ je prvoideál, právě když $\mathcal{I}$ je maximální ve smyslu inkluze.
Dk. Nechť $\mathcal{I}$ je prvoideál a nechť ideál $\tilde{\mathcal{I}}$ je striktně větší ideál. Tedy existuje $M \in \tilde{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{I}$. Ovšem $M^c \in \mathcal{I}$ dle vlastnosti (iv) prvoideálu, tedy také $M^c \in \tilde{\mathcal{I}}$. Pak ale $M \cup M^c = X \in \tilde{\mathcal{I}}$, a to je spor.
Obráceně, nechť $\mathcal{I}$ není prvoideál. Tedy existuje $M \subset X$ taková, že $M \notin \mathcal{I}$ a též $M^c \notin \mathcal{I}$. Definujme

$$\tilde{\mathcal{I}} = \{M' \cup M'';\ M' \in \mathcal{I},\ M'' \subset M\}$$

Není těžké ověřit, že $\tilde{\mathcal{I}}$ je uzavřeno na konečná sjednocení a má i vlastnost (iii). Podmínka $M^c \notin \mathcal{I}$ pak zaručuje, že $\tilde{\mathcal{I}}$ neobsahuje X. $\square$

Tvrzení 1. Existuje prvoideál množin $\mathcal{I}$ v $\mathbb{N}$, obsahující všechny konečné množiny.
Dk. Dle pozorování výše stačí nalézt maximální (ve smyslu inkluze) ideál $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_K$. To je ovšem snadná aplikace Zornova lemmatu, neboť sjednocení řetězce (tj. rostoucí posloupnosti) ideálů je opět ideál.

Důsledek. Existuje dvouhodnotová konečně-aditivní míra na $\mathbb{N}$, pro niž jsou všechny konečné množiny nulové. Tato míra není σ-aditivní, neboť to by znamenalo

$$1 = \nu(\mathbb{N}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(\{j\}) = 0$$

Nyní zavedeme korespondenci (jednu z mnoha možných) mezi podmnožinami $\mathbb{N}$ a reálnými čísly. Pro $x \in \mathbb{R}$ lze psát

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-n_j} \tag{1}$$

kde $\lfloor x \rfloor$ je celá část x. Množina

$$N_x = \{n_j;\ j \in \mathbb{N}\}$$

odpovídá ,,dyadickému rozvoji“ necelé části a je určena jednoznačně s výjimkou případů typu

$$2^{-1} = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + \dots$$

jichž je spočetně mnoho a tedy nejsou relevantní s ohledem na následující úvahy.

Definice. Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ je prvoideál z Tvrzení 1. Definujme množinu

$$E = \{x \in \mathbb{R};\ N_x \in \mathcal{I}\}$$

Tvrzení 2. [Symetrie množiny E.] Platí:

1. E a E^c jsou vzájemně symetrické vůči bodu $x = 1/2$.
2. E (a tedy i E^c) je invariantní vůči posunům o dyadická racionální čísla

$$q = \sum_{j=1}^{k} 2^{-n_j} \tag{2}$$

Dk. Nechť pro dané $x \in \mathbb{R}$ platí (1) a položme

$$y = -\lfloor x \rfloor + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-m_j} \tag{3}$$

kde

$$\{n_1, n_2, n_3, \dots\}^c = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$$

Tedy $N_x = (N_y)^c$, neboli $x \in E$ právě když $y \in E^c$. Sečtením (1), (3) pak dostáváme

$$x + y = \sum_{j=1}^{\infty} 2_{-n_j} + 2^{-m_j} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$$

K důkazu druhé části stačí uvážit, že je-li q tvaru (2), pak N_x a N_{x+q} se liší nejvýše o konečně mnoho členů, a tedy $N_x \in \mathcal{I}$ právě když $N_{x+q} \in \mathcal{I}$. $\square$

Tvrzení 3. Množina E je spravedlivá v každém intervalu I, tj.

$$\lambda^*(I \cap E) = \lambda^*(I \setminus E).$$

Dk. Dle Tvrzení 2 je E spravedlivá vůči všem intervalům o středu $1/2$, a také vůči všem dyadicky racionálním posunům těchto intervalů.
Pomocí těchto lze libovolně přesně aproximovat už každý interval.

Tvrzení 4. Množina E je neměřitelná.
Dk. Podle Lebesgueovy věty o hustotě platí pro každou měřitelnou $M \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda(M \cap (x_0 - h, x_0 + h))}{\lambda(x_0 - h, x_0 + h)} = \chi_M(x_0)$$

ve skoro všech bodech $x_0 \in \mathbb{R}$. Pokud by E byla měřitelná, platilo by pro každý interval $\lambda(I \cap E) = \lambda(I \setminus E) = \lambda(I)/2$, tj. uvedená limita by byla rovna $1/2$, což je spor. $\square$