1) Sestrojte funkci $f(x) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ takovou, že $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konverguje, třebaže $f(x) \not\to 0$ pro $x \to +\infty$.

2) Sestrojte nespočetnou množinu míry nula.

3) Najděte příklad funkce, která má Newtonův, ale nemá Lebesgueův integrál.

4) Najděte posloupnost $f_n(x) \to f(x)$, pro kterou můžeme zaměnit limitu a integrál, prestože nejsou splněny předpoklady Leviho ani Lebesgueovy věty.

5) Nechť $h(x) > 0$ s.v. v (omezeném) intervalu $[a, b]$. Pak $I_n = \int_a^b \exp(-nh(x))\,dx \to 0$ pro $n \to \infty$ (dle Lebesgueovy věty s majorantou $g(x) \equiv 1$).

Někdy je užitečné vědět též rychlost konvergence $I_n \to 0$. Následující úvahy pokryjí běžné případy:

(i) Je-li $h(x)$ striktně odražená od nuly, pak $I_n \to 0$ exponenciálně rychle.

(ii) Pro $l > 0$, $\delta > 0$ pevné je $\int_0^\delta \exp(-nx^l)\,dx \sim n^{-1/l}$, $n \to \infty$.

(iii) *Tvrzení.* Nechť pro jisté $x_0 \in [a, b]$ je $h(x_0) = 0$ ostré globální minimum. Nechť navíc $h^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 0, \dots l - 1$, avšak $h^{(l)}(x_0) \neq 0$. Potom $I_n \sim n^{-1/l}$, $n \to \infty$.

Příklady aplikací: $\int_0^1 x^n\,dx \sim n^{-1}$, $\int_0^\pi \sin^n x\,dx \sim n^{-1/2}$.

6) Ukažte, že funkce $F(a) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{|x-a|}}$ je spojitá v intervalu $I = (\alpha, \beta)$, třebaže Větu o spojité závislosti nelze aplikovat na žádném (netriviálním) podintervalu I.

Nápověda:

1) $f(x)$ je nula mimo vhodně rozmístěné „špičky“ o výšce 1 a ploše $1/2^n$
2) Cantorovo diskontinuum
3) neabsolutní konvergence
4) fixujme $g(x) > 0$ takovou, že $\int_0^\infty g(x)\,dx = +\infty$, a pod ní vepisujme vhodné $f_n(x) \to 0$ tak, aby $\sup_{n\geq 1} f_n(x) = g(x) \ldots$
5) (ii) substituce $nx^l = y$ (iii) lze psát $[a, b] = U \cup V$, kde U je malé okolí x_0. Potom $h(x)$ je jako $c|x - x_0|^l$ na U, a je striktně odražené od nuly na V, čímž jsme v situaci (i) resp. (ii)

   Aplikace: $h(x) = -\log x$ resp. $-\log \sin x$ pro $x_0 = 1$ resp. $x_0 = \pi/2$
6) substituce $y = x - a$; vskutku, nejmenší majoranta $\sup_{a\in\tilde{I}} |f(a, x)| = +\infty$ na $\tilde{I} \subset I$