7. Stabilita

Pozn. (1) Lemma 4.1: $x' = f(x,t)$, f .. L-lipschitz. (vůči x)

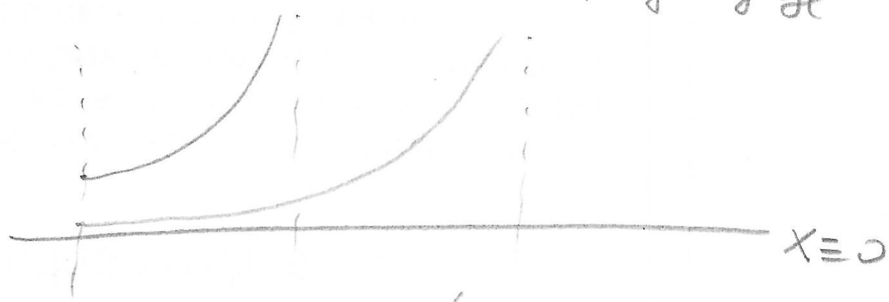
$$\Rightarrow |x(t)-y(t)| \leq |x(t_0)-y(t_0)| \cdot \exp(L|t-t_0|)$$

ale prakticky: $L = 5$, $|x(t_0)-y(t_0)| = 10^{-5}$

$|t-t_0| \geq \underline{\underline{2.3}} \Rightarrow PS \sim 1$, nefunguje

(2) $x' = x^2$

$x(0) = x_0 > 0$



$\underline{\underline{\text{nestabilita}}}$ (vůči $x_0 = 0$).

idea: stabilita (asymptotická):

= malé poruchy x_0 se příliš nemění (či dokonce jde do 0) pro $t \to +\infty$.

(3) $\tilde{x}(t)$ řešení rce (1.1) $x' = f(x,t)$,

piš $x(t) = u(t) + \tilde{x}(t)$,

pak $x(t)$ řeší (1.1) $\Leftrightarrow$ $u(t)$ řeší $u' = g(u,t)$,

kde $g(u,t) = f(u + \tilde{x}(t), t) - f(\tilde{x}(t), t)$

navíc: $u \equiv 0 \Leftrightarrow x = \tilde{x}$.

$\Rightarrow$ BÚNO: uvažujeme jen stabilitu nulového řešení

Definice. Nechť: $f(x,t)$ ... spojité, lokálně lipsch. vůči x v $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\Omega \supset \{0\} \times I$, $I = (\tau, +\infty)$

$f(0,t) = 0 \ \forall t \in I$ $\left(\Rightarrow x \equiv 0, t \in I \text{ je řešení} \right)$.

Potom nulové řešení nazveme:

(i) stabilní (v I), pokud: $\forall t_0 \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.ž. $\forall |x_0| < \delta \Rightarrow \varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splní $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$.

(ii) nestabilní, pokud není stabilní

(iii) lokální atraktor, pokud: $\forall t_0 \in I \ \exists \eta > 0$ t.ž. $\forall |x_0| < \eta$: $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro $\forall t \geq t_0$ a navíc $\varphi(t, t_0, x_0) \to 0$, $t \to +\infty$

(iv) asymptoticky stabilní, je-li (i) stabilní a (iii) lokální atraktor

(v) uniformně stabilní v I, pokud: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.ž. $\forall t_0 \leq t \in I \ \forall |x_0| < \delta$: řešení: $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$

(vi) uniformně asymptoticky stabilní v I, pokud: je uniformně stabilní a navíc $\exists \eta > 0 \ \forall \varepsilon > 0$ $\exists T > 0 \ \forall t_0 \in I \ \forall |x_0| < \eta$: $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro $\forall t \geq t_0$ a $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0 + T$

Pozn.: (1) stabilita $\Leftrightarrow$ spojitost $\varphi(t, t_0, x_0)$ v bodě $x_0 = 0$, stejnoměrně vůči $t \in [t_0, +\infty)$, t_0 pevné

uniformní stabilita $\Leftrightarrow$ ... navíc stejnoměrně vůči $t_0 \in I$

(2) lokální atraktor $\not\Rightarrow$ stabilita
(Vinogradov)

(3) pro autonomní rce $x' = f(x)$:
stabilní $\Leftrightarrow$ uniformně stabilní
asym. stab. $\Leftrightarrow$ unif asym. stab

Věta 7.1 [Stabilita lineární rce.]. Je dána rce (5.2) $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojitá v $I = (\tau, +\infty)$. Nechť $\Phi(t)$ je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je:

1. stabilní (v I) $\Leftrightarrow$ $\|\Phi(t)\|$ je omezená v $[t_0, +\infty)$, pro $\forall t_0 \in I$
2. asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow$ $\|\Phi(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$
3. uniformně stabilní $\Leftrightarrow$ $\exists c\ \forall t \geq s \in I$ platí
$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$$
4. uniformně asymptoticky stabilní
$\Leftrightarrow$ $\exists \alpha, c > 0\ \forall t \geq s \in I$: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c e^{-\alpha(t-s)}$

Věta 7.1: důkaz

pomocné úvahy: $\varphi(t,t_0,x_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$; $\forall t, t_0 \in I$; $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(ú1) $|Ay| \le c_1 \quad \forall |y| \le c_2 \Rightarrow \|A\| \le \frac{c_1}{c_2}$

neboť $y = c_2 x$; $|x| \le 1$; tj. $|c_2 A x| \le c_1 \quad \forall |x| \le 1$

$$|Ax| \le \frac{c_1}{c_2} \quad \forall |x| \le 1$$

tj. $\|A\| \le \frac{c_1}{c_2}$.

(ú2) $|ABx| \le c_1 \quad \forall |x| \le c_0$; B regulární $\Rightarrow \|A\| \le \frac{c_1}{c_0}\|B^{-1}\|$

neboť $Bx = y$; značím: y vyplní $\frac{c_0}{\|B^{-1}\|}$-kouli:

$|y| \le \frac{c_0}{\|B^{-1}\|}$ dáno: $y = B(\underbrace{B^{-1}y}_{x})$; $|\underbrace{B^{-1}y}_{x}| \le \|B^{-1}\| \cdot |y| \le c_0$.

dle (ú1): $\|A\| \le \frac{c_1}{c_0/\|B^{-1}\|} = \frac{c_1}{c_0}\|B^{-1}\|$.

---

1. „$\Leftarrow$": $|\varphi(t,t_0,x_0)| = |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0| \le \|\Phi(t)\| \cdot \|\Phi(t_0)^{-1}\| \cdot |x_0|$

t_0 fix.

víme: $\|\Phi(t)\| \le C$; tj. $\varepsilon > 0$ dáno: stačí volit

$$\delta < \frac{\varepsilon}{C\|\Phi^{-1}(t_0)\|}.$$

„$\Rightarrow$": volím $\varepsilon = 1$; tj. $\exists \delta > 0$ t.ž.

t_0 fix.

$$|\varphi(t,t_0,x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| < 1$$

$$\forall t \ge t_0 \qquad \forall |x_0| < \delta$$

dle (ú2): $\|\Phi(t)\| \le \frac{1}{\delta}\|(\Phi^{-1}(t_0))^{-1}\| = \frac{\|\Phi(t_0)\|}{\delta} = C$

2. „⇐": víme: $\|\Phi(t)\| \to 0,\ t \to +\infty$

cíl: 0 stabilní & lok. atraktor
(i) (ii)

ad (i) jistě $t \mapsto \|\Phi(t)\|$ spojité na I; tj. $\|\Phi(t)\|$ omez. na $(t_0, +\infty)$, $\forall t_0$ pevné; dle 1⇐ ... stabilita

ad (ii) $|\varphi(t, t_0, x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq \|\Phi(t)\| \cdot |\Phi^{-1}(t_0)x_0| \to 0$

$t \to +\infty$; $\forall t_0, x_0$ pevné: dokonce globální atraktor

---

„⇒" víme: $|\varphi(t, t_0, x_0)| \to 0$; $\forall t_0, |x_0| < \eta$ pevné

linearita: dokonce pro $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

cíl: $\|\Phi(t)\| \to 0,\ t \to +\infty$.

$\varepsilon > 0$ dáno: e_i .. bázový vektor .. $\exists t_i > t_0$ t.ž.

$$|\varphi(t, t_0, e_i)| < \frac{\varepsilon}{n \cdot \|\Phi(t_0)\|}\ ;\ \forall t \geq t_i$$

nechť $|x_0| \leq 1$ je libovolné; tj. $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$; $|\alpha_i| \leq 1$

nechť $t \geq T := \max\{t_1, \dots, t_n\}$.

$$|\varphi(t, t_0, x_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(t, t_0, e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| |\varphi(t, t_0, e_i)|$$

$$\leq n \cdot \frac{\varepsilon}{n\|\Phi(t_0)\|}$$

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq \frac{\varepsilon}{\|\Phi(t_0)\|} \quad \forall |x_0| \leq 1,\ t \geq T$$

(úl2)... $\|\Phi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|\Phi(t_0)\|} \cdot \|\Phi(t_0)\| = \varepsilon\ ;\ \forall t \geq T.$

3. „⇐": víme: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq C \quad \forall\, t \geq s \in I$

cíl: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ |x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0 \in I$

lze: $|\varphi(t, t_0, x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq \underbrace{\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\|}_{< C} \cdot |x_0|$

tj. $\varepsilon > 0$ dáno: vol $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$.

„⇒": užij $\varepsilon = 1$ .. $\exists \delta > 0$ t.ž. $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq 1 \quad \forall |x_0| \leq \delta$

tj. dle (2.1): $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq \dfrac{1}{\delta}$; $\forall\, t \geq t_0 \in I$.

---

4. „⇐": víme: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq C e^{-\alpha(t-s)} \quad \forall\, t \geq s \in I$

cíl: unif. stab. (i) & $|x_0| < \eta \Rightarrow \varphi(t_0 + T, t_0, x_0) \to 0$, $T \to +\infty$ stejnoměrně $|x_0| \leq \eta$; $t_0 \in I$ (ii)

(i) zřejmě $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq C \quad \forall\, t \geq t_0 \in I$

užij 3. „⇐"

(ii) $|\varphi(t_0 + T, t_0, x_0)| = |\Phi(t_0 + T)\Phi^{-1}(t_0)x_0|$

$\leq \|\Phi(t_0 + T)\Phi^{-1}(t_0)\| \cdot |x_0| \leq C e^{-\alpha T} |\eta| \to 0$; $T \to +\infty$

nezávisle na daných t_0, x_0.

4 „$\Rightarrow$": nechť $\varphi(t_0+T, t_0, x_0) \to 0$; $T \to \infty$, stejnoměrně

$|x_0| \le \eta$, $t_0 \in I$

cíl: $\exists\, C, \alpha > 0$ t.ž. $\|\Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\| \le C e^{-\alpha(t-s)}$

$\forall\, t \ge s \in I.$

volme $T > 0$ t.ž. $|\varphi(t_0+T, t_0, x_0)| \le \frac{1}{2}\eta$; $\forall\, t_0 \in I$; $|x_0| \le \eta$

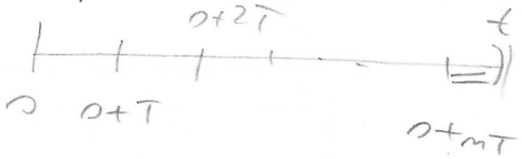
$|\Phi(t_0+T)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0| \le \frac{1}{2}\eta$; $\forall\, |x_0| \le \eta$

dle (ii) $\Rightarrow$ (*) $\|\Phi(t_0+T)\,\Phi^{-1}(t_0)\| \le \frac{1}{2} = e^{-\tilde\alpha}$; $\tilde\alpha = \ln 2 > 0.$

$t_0 \in I$ libovolné.

nechť $t > s \in I$ jsou libovolné..

lze psát: $t = s + mT + t_1$; $m \ge 0$ celé, $t_1 \in [0, T)$



$$\Phi(t)\,\Phi^{-1}(s) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s+mT)\cdot\Phi(s+mT)\,\Phi^{-1}(s+(m-1)T)\cdots$$

$$\cdots\ \Phi^{-1}(s+T)\,\Phi(s+T)\cdot\Phi(s)$$

$$= \underbrace{\Phi(t)\,\Phi^{-1}(s+mT)}_{\|\cdot\| \le C_0 \text{ .. mez. sol. ; } 3 \Rightarrow}\cdot\prod_{j=1}^{m}\underbrace{\Phi(s+jT)\,\Phi^{-1}(s+(j-1)T)}_{\|\cdot\| \le e^{-\tilde\alpha} \text{ dle } (*)}$$

$$\|\Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\| \le C_0\, e^{-\tilde\alpha m} = C_0\, e^{-\tilde\alpha\left(\frac{t-s}{T}\right) + \tilde\alpha \frac{t_1}{T}} \quad \frac{t_1}{T} \le 1$$

$$\le C\cdot e^{-\alpha(t-s)}$$; kde $C = C_0\, e^{\tilde\alpha} = 2C_0$

$\alpha = \frac{\tilde\alpha}{T} = \frac{\ln 2}{T}.$

Def: <u>násobnost</u> $\lambda_0 \in \sigma(A)$ (vše v $\mathbb{C}$)

- algebraické (coby kořene $\det(\lambda I - A)$)
- geometrické ($\dim \mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)$)

platí: geometrické nás. $\leq$ algebraické nás

($=$) .. tzv. <u>polojednoduché</u> vlastní číslo.

Jordanovy b. $m \times m$: alg. nás $= m$
($J = \lambda_0 I + L$) geom. n. $= 1$

tedy: $\lambda_0 \in \sigma(A)$ polojednoduché $\Leftrightarrow$ jen triv. (1×1) Jord. buňky
$\Leftrightarrow$ $A|_{\mathrm{Ker}(\lambda_0 I - A)}$ diagonalizovatelné

<u>Věta 7.2</u> Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak $x \equiv 0$ řešení rce (6.1) $x' = Ax$ je (v $I = (\tau, +\infty)$, $\tau \in \mathbb{R}$)

1. (uniformně) stabilní, právě když:
   $\forall \lambda \in \sigma(A)$: buď $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$,
   nebo $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ & λ <u>polojednoduché</u>
2. (uniformně) asymptoticky stabilní, právě když: $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

<u>Pozn.</u> tzv. <u>Hurwitzovské</u> matice (též <u>stabilní</u>)

A je Hurwitzovská $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha, c > 0 : \|e^{tA}\| \leq c e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$

kde $\alpha > 0$ lze volit t.ž. $\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$

Dk. Věta 7.1: e^{tA} je fund. matice

Věta 7.2: 0 stabilní resp. asymptoticky stab.

$\Leftrightarrow$ $\|e^{tA}\|$ omezené resp. $\to 0$, pro $t \to +\infty$

BÚNO: A má Jordanův tvar, tj.

$$A = \operatorname{diag}(J_1, \dots J_k)$$

$$e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_k}).$$

$\forall j$: $\|e^{tJ_j}\| \le \|e^{tA}\| \le \sum_{j=1}^{k} \|e^{tJ_j}\|$

tj. stačí vyšetřit chování $\|e^{tJ_j}\|$.

Víme (viz důkaz V. 6.5):

$$J_j = \lambda_j I + L_j \Rightarrow e^{tJ_j} = e^{\lambda_j t} \cdot P_j(t)$$

$(m_j \times m_j)$

$$\|e^{tJ_j}\| \sim e^{(\operatorname{Re}\lambda_j)t} (1+t)^{m_j - 1},$$

$t \to +\infty$

a tedy: $\|e^{tJ_j}\|$ omezené $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ nebo

$\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, $m_j = 1$

$$\|e^{tJ_j}\| \to 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_j < 0.$$

Lemma 7.1 Jedeme rovnice $x' = Ax + r(x,t)$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ splňuje $\|e^{tA}\| \le c e^{-\alpha t}$, pro $t \ge 0$ $(\alpha, c > 0)$, a funkce $r: \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ je spojitá, $|r(x,t)| \le \gamma |x|$.
Nechť $\gamma < \alpha / c$. Pak $|x(t)| \le c e^{-\beta t} |x(0)|$, pro $t \ge 0$.
Speciálně: 0 je (uniformně) asymptoticky stabilní.

Dk.: TRIK: $x(t)$ řeší $x' = Ax + r(x,t)$ $\Rightarrow$
řeší $x' = Ax + h(t)$, kde $h(t) = r(x(t), t)$

Věta 6.4 (variace konstant)
$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \underbrace{h(s)}_{= r(x(s),s)}\, ds, \quad \forall t \ge 0$$

odhady:
$$|x(t)| \le \underbrace{|e^{tA} x_0|}_{\le \|e^{tA}\| \cdot |x_0|,\ \|e^{tA}\| \le c e^{-\alpha t}} + \int_0^t \underbrace{|e^{(t-s)A} r(x(s),s)|}_{\le \|e^{(t-s)A}\| \cdot |r(x(s),s)| \le c e^{-\alpha(t-s)} \cdot \gamma |x(s)|} ds$$

celkem sedí:
$$|x(t)| \le c e^{-\alpha t} |x_0| + \int_0^t c\gamma \cdot e^{-\alpha s} \cdot e^{\alpha s} |x(s)|\, ds$$

označ $y(t) = e^{\alpha t} |x(s)|$..

$$y(t) \le \underbrace{c|x_0|}_{K} + \int_0^t \underbrace{c\gamma}_{g} \cdot y(s)\, ds; \quad \forall t \ge 0$$

V.4.1: (Gronwall) $\Rightarrow$ $y(t) \le c|x_0| \cdot e^{c\gamma t}, \ \forall t \ge 0$

tedy: $|x(t)| \leq C \cdot |x_0| \cdot e^{-\beta t}, \quad t \geq 0,$

kde $\beta = \alpha - C\mu > 0$

<u>stabilita</u>: $\varepsilon > 0$ dáno: vol $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x(t)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} \cdot e^{-\beta t} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

$x(t) \to 0, t \to \infty$: <u>jasné</u>.

<u>Věta</u> [O linearizované (ne)stabilitě.]

Je dána rovnice $x' = f(x)$.

Nechť: $f(x_0) = 0$, $f \in C^1(\mathcal{U}_{x_0})$, $A := \nabla_x f(x_0)$ (matice linearizace)

Pak platí: $\forall \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}\lambda < 0 \Rightarrow x_0$ stabilní (asymptoticky, uniformě)

$\exists \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}\lambda > 0 \Rightarrow x_0$ není stabilní

<u>Pozn.</u>: $\operatorname{Re}\lambda \leq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$, leč ne ostře:

$\boxed{\text{nelze rozhodnout jen z vlastností } A}$

Dk. V.7.3 $\quad x' = f(x) = Ax + r(x)$; tedy

(BÚNO $x_0 = 0$)

totální diferenciál $\quad \frac{r(x)}{|x|} \to 0$, pro $x \to 0$.

víme: A Hurwitzovské,

tj. $\exists\, \alpha, c > 0$ t.ž. $\|e^{tA}\| \le c e^{-\alpha t}$, $t \ge 0$

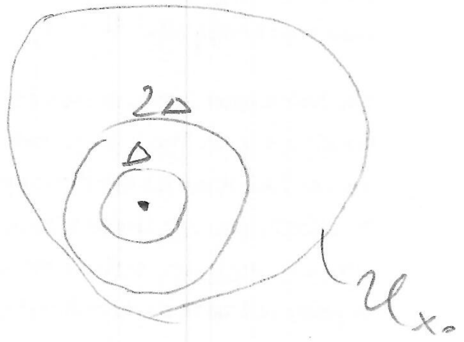
volme $\gamma > 0$, $\Delta > 0$ t.ž. $\gamma < \alpha / c$, $|r(x)| \le \gamma |x|$ $\forall\, |x| \le 2\Delta$.

volme $\eta(x) : \mathcal{U}_{x_0} \to \mathbb{R}$ t.ž.:

$0 \le \eta \le 1$,

$\eta(x) = 1$ pro $|x| \le \Delta$

$= 0$, $|x| \ge 2\Delta$



modifikovaná úloha:
(M) $x' = Ax + \tilde{r}(x)$

kde $\tilde{r}(x) = \begin{cases} \eta(x) r(x), & x \in \mathcal{U}_{x_0} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$

zřejmě: $|\tilde{r}(x)| \le \gamma |x|$; $\forall x$

$\Rightarrow$ 0 je asymptoticky stabilní pro (M), dle L.7.1.

leč: $r(x) = \tilde{r}(x)$ pro $|x| \le \Delta$,
tj. řešení (M) a původní úlohy mají v 0 týž typ stability ...
$\Rightarrow$ jsem hotov.

Dk. Věty 7.4

(BÚNO $x_0 = 0$)

$$x' = f(x) = Ax + r(x); \quad \frac{r(x)}{|x|} \to 0, \ |x| \to 0$$

$x(t) = C\tilde{x}(t)$; C .. regulární, obecně v $\mathbb{C}^{n \times n}$

$$C\tilde{x}' = AC\tilde{x} + r(C\tilde{x}) \quad / \ C^{-1}$$

$$= \underbrace{C^{-1}AC}_{\tilde{A}}x + \underbrace{C^{-1}r(C\tilde{x})}_{\tilde{r}(\tilde{x})}, \quad \frac{|\tilde{r}(\tilde{x})|}{|\tilde{x}|} \to 0, \ |y| \to 0$$

x

$$J = \lambda_0 I + N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & \delta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

celkem: BÚNO $A = D + N$, $\|N\|$ ... malé

$x = (y, z)$ stab. + centr. $D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_k}_{\sigma_+(A)}; \underbrace{\lambda_{k+1}, \dots \lambda_n}_{\sigma_0 \cup \sigma_-(A)})$.

y nestabilní

$\lambda \geq 1$; vol: $\beta > 0$ tž. $\operatorname{Re}\lambda \geq \beta$; $\forall \lambda \in \sigma_+(A)$

$0 < \gamma < \frac{\beta}{4}$ t.ž. $\|N\| \leq \frac{\gamma}{2}$

$\varepsilon > 0$ t.ž. $\frac{|r(x)|}{|x|} \leq \frac{\gamma}{2}$; $\forall |x| \leq \varepsilon$

celkem tedy: $\boxed{x' = Dx + s(x)}$, kde $|s(x)| \leq \gamma |x|$ pro $\forall |x| \leq \varepsilon$

$$y' = D^+ y + s^+(x)$$

$$z' = D^{0-} z + s^{0-}(x)$$

tj. rozklad $D = (D^+, D^{0-})$

$$x = (y, z)$$

na nestabilní a centrálně-stabilní směry aside:

$x = x(t) \in \mathbb{R}$: $\quad \frac{d}{dt} x^2 = 2x x'$

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$: $\quad \frac{d}{dt} |x|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 2 \sum_{j=1}^{n} x_j x_j'$

$$= 2x \cdot x'$$

$x = x(t) \in \mathbb{C}^n$: $\quad \frac{d}{dt} |x|^2 = \frac{d}{dt} \sum_j x_j \overline{x_j}$

$$= \sum_j x_j (\overline{x_j})' + x_j' \overline{x_j} = \sum_j 2 \mathrm{Re} (\overline{x_j} x_j')$$

ale: $\quad (\overline{x_j})' = \overline{(x_j')}$; nebot: $' = \frac{d}{dt}$, $t \in \mathbb{R}$

$$x_j (\overline{x_j})' = \overline{(\overline{x_j} x_j')}$$

$$= 2 \mathrm{Re} (\overline{x} \cdot x')$$

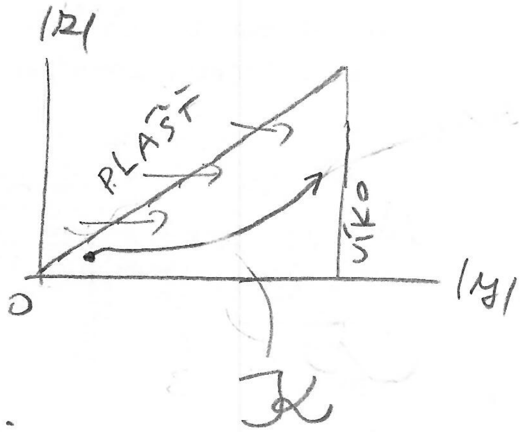
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= D^+ y + s^+(t) \\ z' &= D^- z + s^-(t) \end{aligned}} \quad \Big/ \begin{aligned} &\cdot \overline{y},\ 2\mathrm{Re} \\ &\cdot \overline{z},\ 2\mathrm{Re} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} |y|^2 = \underbrace{2 \mathrm{Re} \left(\underbrace{D^+ y \cdot \overline{y}}_{\sum \lambda_j y_j \overline{y_j} \ (\lambda_j \in \sigma^+)} \right)}_{\geq 2\beta |y|^2} + \underbrace{2 \mathrm{Re} (s^+(t) \cdot \overline{y})}_{|\cdot| \leq 2 |s(t)| |y| \leq 2\gamma |t| \cdot |y|}$$

$$\frac{d}{dt} |z|^2 = \underbrace{2 \mathrm{Re} (D^- z \cdot z)}_{\leq 0} + \underbrace{2 \mathrm{Re} (s^-(t) \cdot \overline{z})}_{|\cdot| \leq 2\gamma |t| \cdot |z|}$$

$$\frac{d}{dt}|y|^2 \ge 2\beta|y|^2 - 2\gamma|t|\cdot|y|$$

$$\frac{d}{dt}|z|^2 \le 2\gamma|t|\cdot|z|$$



$$K = \{(y,z);\ 0 \le |z| \le |y| \le \varepsilon\}$$

$x(t) = (y(t), z(t))$ ... řešení (max.) s.ř.

$x(0) \in \operatorname{int} K$, libovolně blízko počátku $\neq 0$.

cíl: $x(t)$ opustí K, leč nikoliv „pláštěm": $|z| = |y|$

nýbrž „víkem": $|x| = \varepsilon$

$\Rightarrow$ nestabilita 0

(pak hotovo).

$x(t) \in \operatorname{int} K$:

$|z| \le |y|$

$|t| \le |z| + |y| < 2|y|$

$$\frac{d}{dt}|y|^2 \ge \underbrace{2\beta|y|^2 - 2\gamma|y|^2}_{2(\beta-\gamma)} \ge \beta|y|^2$$

$\gamma < \frac{\beta}{2}$

$$\Rightarrow |y(t)|^2 \ge e^{\beta t}|y(0)|^2 > 0$$

?? $\exists\, t_1 > 0$ s.ř.: $|z(t_1)| = |y(t_1)|$

$t = t_1$: $$\frac{d}{dt}\left(|z|^2 - |y|^2\right) \ge 2\beta|y|^2 - 2\gamma|t|\cdot|y| - 2\gamma|t|\cdot|z|$$

$$= 2\left(\beta|y|^2 - \gamma\underbrace{|t|}_{\substack{|x|\\ \le |y|+|z| = 2|y|}}\cdot\left(|y| + \underbrace{|z|}_{=|y|}\right)\right) \ge 2(\beta - 4\gamma)|y|^2 > 0$$