

6. Lineární normy a konsenzusní koeficienty

Def. norma (abs. hodnota) $x \in \mathbb{R}^n$: $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$

norma matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\|A\| = \max \{|Ax|; |x| \leq 1\}$

Věta 6.1 [Vlastnosti normy matice]. Necht' $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Platí: (i) $\|A\| \geq 0$, a $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

(v) $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$

(vi) A regulární $\Rightarrow |Ax| \geq |x| / \|A^{-1}\|$.

dk. (v): $x = 0$... jasně, jinak položíme $\tilde{x} = \frac{x}{|x|}$,

tedy $|\tilde{x}| = 1$, $x = |x| \cdot \tilde{x}$

$$|Ax| = |A(|x|\tilde{x})| = |x| \cdot |A\tilde{x}| \leq |x| \cdot \|A\|$$

$$\leq \max \{|A\tilde{x}|; |\tilde{x}| \leq 1\}$$

(iv): necht' $|x| \leq 1$, pak dle (v):

$$|ABx| \leq \|A\| \cdot |Bx| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot |x| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot 1 \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

sup přes $x \Rightarrow$ řešen.

$$(vi): |x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ax|$$

(i)-(iii): snadno (podobně jako iv)

axiomy normy

Pozn. $\|A\|_\infty := \max \{ |\underbrace{[A]_{ij}}_{\text{(složky matice A)}}|, i, j=1, \dots, n \}$

léž matice v $\mathbb{R}^{n \times n}$: musí být ekvivalentní, tj.

$$\exists c_1, c_2 > 0 \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}: \|A\|_\infty \leq c_1 \|A\|$$

$$| \Rightarrow \|A\| \leq c_2 \|A\|_\infty$$

lze ekvivalentně chápat „po složkách“.

$$(A_n \rightarrow A \text{ v } \|\cdot\| \Leftrightarrow [A_n]_{ij} \rightarrow [A]_{ij} \text{ v } \mathbb{R}, \text{ pro } \forall i, j)$$

Def. Exponenciála matice $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Pozn. řada konverguje $\Leftarrow$ konverguje absolutně:

$$\sum_k \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_k \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq e^{\|A\|}$$

($\mathbb{R}^{n \times n}$ s $\|\cdot\|$ je Banachov m.)

Věta 6.2 Polož $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je f.m. rovnice (6.1) $x' = Ax$, splňující $U(0) = I$.

dkz. $U(0) = I$ je zřejmé; formálně (něměne $\sum, \frac{d}{dt}$)

$$U'(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \right)' \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} A^k t^k \right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} A^{l+1} t^l = A U(t)$$

?? derivace člen po členu řady: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$

!! maximálně řada, konvergující pro $\forall t \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ poloměr konvergence $= +\infty$, bez nuty v $\mathbb{R} (\mathbb{C})$
(možno argumentovat „po složkách“).

Věta 6.3 [Vlastnosti maticové exponenciály.]

- (i) $e^{\lambda I} = e^{\lambda} \cdot I, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (ii) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$
- (iii) C regulární $\Rightarrow e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$
- (iv) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$, zvláště: e^A vždy regulární.

dk. (i), (iii): snadno z definice ($(C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC$).

(ii): pomocný výpočet:

$$A e^{tB} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{A B^k}_{\rightarrow} t^k = e^{tB} A$$

podobně: $B e^{tA} = e^{tA} B$. (neloží $AB^k = B^k A$)

myšl:
$$\begin{aligned} \underline{(e^{tA} \ e^{tB})}'} &= (e^{tA})' e^{tB} + e^{tA} (e^{tB})' \\ &= A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} \\ &= A e^{tA} e^{tB} + B e^{tA} e^{tB} \\ &= \underline{(A+B) e^{tA} e^{tB}}. \end{aligned}$$

tedy: $U(t) = e^{tA} e^{tB} \dots$ řešení (množina) $x' = (A+B)x$
 $\circ$ poč. podm. $x(0) = I$

leč $\tilde{U}(t) = e^{t(A+B)}$... řešení této rovnice

jednoznačnost (Věta 5.1)

$$\Rightarrow U(t) = \tilde{U}(t), \forall t$$

$$\text{pro } t=1: e^A e^B = e^{A+B}$$

(iv): $A, -A$ jsou konmutující, tedy dle (ii):

$$I = e^0 = e^{A+(-A)} = e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$$

Pozn. spočítat e^{tA} ... prakticky?

① diagonální (blokové): $A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots \\ 0 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & 0 & \dots \\ 0 & e^{tB_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

② podobné matice: $\tilde{A} = C^{-1}AC \Rightarrow e^{\tilde{A}} = C^{-1}e^A C$
 $\Uparrow$
 (V.6.3)

změníme

soustavu:

$$x' = Ax \Leftrightarrow y' = \tilde{A}y$$

$$y(t) = U(t)x(0)$$

③!! Jordanova bunka: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^{(m \times m)}$

$$J = \lambda I + L$$

$$e^{\lambda J} = e^{\lambda t} I \cdot e^{tL};$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

poznáji: $L^m = 0$ (nilpotentní)

$$\Rightarrow e^{tL} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} L^k t^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & & & \\ \emptyset & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

celkem tedy: $e^{tJ} = e^{\lambda t} \cdot P(t), \quad \|P(t)\| \sim (1+|t|^{m-1})$

$$|e^{\lambda t}| = e^{(\operatorname{Re} \lambda)t}$$

Věta 6.4 [Variace konstant.] Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in (a, b)$, $g(t): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak řešení (6.2) $x' = Ax + g(t)$,

ke které odpovídá podmínka:

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} g(s) ds, \quad \text{pro } \forall t \in (a, b).$$

důl. viz Věta 5.3; fund. matice $\Phi(t) = e^{tA}$ (Věta 6.2)

$$\text{a tedy } e^{tA} (e^{t_0 A})^{-1} = e^{(t-t_0)A}$$

Definice! $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

spektrum: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \det(\lambda I - A) = 0\}$,

a jeho části: stabilní $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} < 0\}$

centrální $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} = 0\}$

nestabilní $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\operatorname{Re} > 0\}$

podprostor: $\mathbb{R}^n = X_-(A) \oplus X_0(A) \oplus X_+(A)$

ke $X_-(A) = \operatorname{Lin} \{u; (\lambda I - A)^2 u = 0, \lambda \in \sigma_-(A)\}$

stabilní podprostor, podobně $X_0(A), X_+(A)$ jsou
centrální a nestabilní podpr.

$X_-(A), X_0(A), X_+(A)$ jsou invariantní vůči
 A i $e^{tA}, t \in \mathbb{R}$.

Věta 6.5. [Asymptotické chování (6.1)]. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Pak $\exists \alpha, \beta, \Gamma, c > 0$ a.č. že $\forall t \geq 0$ zloží:

1. (stabilní podpr.) : $x_0 \in X_-(A) \Rightarrow |e^{tA} x_0| \leq c e^{-\alpha t} |x_0|$

2. (nestabilní) : $x_0 \in X_+ \Rightarrow |e^{tA} x_0| \geq c^{-1} e^{\beta t} |x_0|$

3. (centrální) : $x_0 \in X_0 \Rightarrow |e^{tA} x_0| \leq c (\Gamma t + 1)^{\Gamma} |x_0|$
 $\geq \frac{|x_0|}{c(\Gamma t + 1)^{\Gamma}}$

Def. BUNO: A mé Jord. szer, melód.

$$x' = Ax \longrightarrow \tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}, \quad \tilde{A} = C^{-1}AC$$

$$\tilde{x} = C^{-1}x$$

$$\text{sedg} := |\tilde{x}(t)| \sim |x(t)|$$

$$|e^{\tilde{A}t} \tilde{x}_0| \sim |e^{At} x_0| \quad \tilde{x}_0 \in X - (\tilde{A}) \Leftrightarrow x_0 \in X - (A).$$

mecht sedg: $A = \text{diag}(J_1, \dots, J_s); \quad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_j & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$

$$j=1, \dots, s \leq n$$

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \quad m_j \times m_j$$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_s})$$

$$e^{tA} x_0 = \text{sluz}(e^{tJ_1} \pi_1(x_0), \dots, e^{tJ_s} \pi_s(x_0))$$

$$\text{hse } \pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_j}, \quad j.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{e^{tJ_1}} & & \\ & \boxed{e^{tJ_2}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1(x_0) \\ \pi_2(x_0) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\text{sedg: } |e^{tA} x_0| \leq \sum_{j=1}^s |e^{tJ_j} \pi_j(x_0)| \leq \sum_{j=1}^s \|e^{tJ_j}\| \cdot |\pi_j(x_0)|$$

$$\text{ad 1)} \quad x_0 \in \sigma_-(A) \Leftrightarrow \pi_j(x_0) = 0 \text{ and } \operatorname{Re} \lambda_j \geq 0$$

$$|e^{tA} x_0| \leq \sum_{j=1}^r \|e^{tJ_j}\| \cdot |\pi_j(x_0)|; \text{ and } \{\operatorname{Re} \lambda_j < 0\}$$

$$|\pi_j(x_0)| \leq |x_0|$$

$$\|e^{tJ_j}\| \leq |e^{(\operatorname{Re} \lambda_j)t}| \cdot c(1+t)^{m_j},$$

$$t \geq 0$$

$$\text{and } \alpha > 0 \text{ s.t. } \operatorname{Re} \lambda_j < -\alpha < 0, \forall \operatorname{Re} \lambda_j < 0.$$

$$\Rightarrow \|e^{tJ_j}\| \leq e^{-\alpha t} \cdot e^{(\operatorname{Re} \lambda_j - \alpha)t} \cdot c(1+t)^{m_j}$$

$$\text{majorize on } [0, +\infty)$$

$$\rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \text{ommesure on } [0, +\infty).$$

$$\Rightarrow \|e^{tJ_j}\| \leq c \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \forall \operatorname{Re} \lambda_j < 0.$$

$$\text{ad 2)} \quad \text{TRIK: } x_0 \in \sigma_+(A) \Leftrightarrow x_0 \in \sigma_-(-A)$$

$$|x_0| = |e^{-tA} e^{tA} x_0| = |e^{t(-A)} e^{tA} x_0|$$

$$\in \sigma_+(A) = \sigma_-(-A)$$

$$(\text{and } -A) \leq c e^{-\alpha t} |e^{tA} x_0|, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow |e^{tA} x_0| \geq \tilde{c} e^{\alpha t} |x_0|, \quad t \geq 0.$$

ad3) podobne tvrdenie: $x_0 \in \sigma_0(A) \Rightarrow \pi_j(x_0) = 0$
 pre $\operatorname{Re} \lambda_j \neq 0$

$$\Rightarrow |e^{tA} x_0| \leq \sum_{j=1}^2 \|e^{tJ_j}\| |\pi_j(x_0)|, \text{ kde}$$

$$\{\operatorname{Re} \lambda_j = 0\} \quad \|e^{tJ_j}\| \leq c \cdot (1+t)^{m_j}, \quad t \geq 0.$$

na druhom strane:

$$|x_0| = |e^{t(-A)} e^{tA} x_0| \leq c(1+t)^n |e^{tA} x_0|$$

$\underbrace{e^{t(-A)}}_{\in \sigma_0(-A)}$

Pozn: ① odhady 1,2,3 možno $X_{-,+,0}$ charakterizovať
 (nelotne rovnice); $\exists x_0 \in X_-(A), x_0 \neq 0$

$$\Leftrightarrow |e^{tA} x_0| \leq c e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

② rovnako: $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pre $\forall \lambda \in \sigma(A)$

$$\Leftrightarrow \exists c, \alpha > 0 : \|e^{tA}\| \leq c e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

③ pre $t \leq 0$ zistiť analogické (rovnako) odhady:

$$|e^{tA} x_0| \geq c e^{-\alpha t} |x_0|, \quad x_0 \in X_-(A)$$

$$|e^{tA} x_0| \leq c e^{\beta t} |x_0|; \quad x_0 \in X_+(A)$$

$$\left. \begin{aligned} |e^{tA} x_0| &\leq c(1+|t|)^n |x_0| \\ &\geq \frac{|x_0|}{c(1+|t|)^n} \end{aligned} \right\} x_0 \in X_0(A)$$

④ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; x_0 = (1, \frac{1}{2}) \Rightarrow |x_0| > 1$; ale: $|e^{tA} x_0| = \frac{1}{2}$.