4. Závislost na počáteční podmínce

$(1.1)_\lambda$ $\quad x' = f(x, t, \lambda)$ ... cíl: řešení $x = x(t)$

$x(t_0) = x_0$ $\quad$ spojité (C^1) vůči x_0, t_0, λ

Věta 4.1 [Gronwallovo lemma.] Nechť $w(t), g(t) \geq 0$, spojité v I, $K \geq 0$, $t_0 \in I$. Nechť platí odhad $w(t) \leq K + \left|\int_{t_0}^{t} g(s) w(s)\, ds\right|$, pro $\forall t \in I$. Potom je

$$w(t) \leq K \cdot \exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\right|\right), \forall t \in I.$$

Dk.) BÚNO omezíme se na $t \geq t_0$ (→ integrály ≥ 0, lze vynechat $|\cdot|$)
(d.ú.: případ $t \leq t_0$)

pomocná fce $\quad \Phi(t) = \varepsilon + K + \int_{t_0}^{t} g(s) w(s)\, ds, \quad t \in I$

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} g(s) w(s)\, ds = g(t) w(t) \leq g(t)\Phi(t)$$

nebot $g \geq 0$, $w \leq \Phi$

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t) \Big/ \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\ln \Phi(t) - \ln \Phi(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

$$w(t) \leq \Phi(t) \leq \underbrace{\Phi(t_0)}_{\substack{\shortparallel \\ \varepsilon + K,\ \varepsilon \to 0+}} \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\right), \forall t \in I$$

Pozn. diferenciální varianta: nechť $\frac{d}{dt} w(t) \leq g(t) w(t)$, $\forall t \geq t_0$

pak $w(t) \leq w(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \right)$, $\forall t \geq t_0$.

Lemma 4.1 nechť f je globálně L-lipschitovská vůči x v Ω. Pak pro $\forall$ řešení (x, I), (y, J) v Ω a $\forall\, t, t_0 \in I \cap J$ platí: $|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| \cdot \exp(L|t - t_0|)$.

Dk.: předpoklad $|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|$, pro $\forall$ $(x,t), (y,t) \in \Omega$.

L. 1.1.
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds,$$
$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)\, ds, \quad \forall\, t, t_0 \in I \cap J$$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| + \Big| \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(x(s), s) - f(y(s), s)}_{|\cdot| \leq L|x(s) - y(s)|}\, ds \Big|$$

užiji Větu 4.1:

$$w(t) = |x(t) - y(t)|$$
$$g(t) \equiv L$$
$$K = |x(t_0) - y(t_0)|$$

$$\Rightarrow \Big| \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \Big| = L|t - t_0|, \text{ rovná.}$$

Věta 4.2 Nechť f je lokálně lipschitzovské v Ω. Pak $\mathcal{D} = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2},\ \varphi(t, t_0, x_0) \text{ má smysl}\}$ je otevřené a $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ je spojité.

dk.

1. KROK nechť $(t_1, t_0, x_0) \in \mathcal{D}$,

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0),\ t \in (a, b) \ \dots \text{ max. řešení.}$$

$$\gamma = \operatorname{graf} x|_{[t_0, t_1]} = \{(x(t), t);\ t \in [t_0, t_1]\}.$$

předpoklad: $\forall \alpha \in \gamma\ \exists Q_\alpha$ ... válcové okolí t.ž.

f je L_α-lipschitzovské na Q_α

kompaktnost γ: $\exists \alpha_1, \dots \alpha_N$ t.ž.

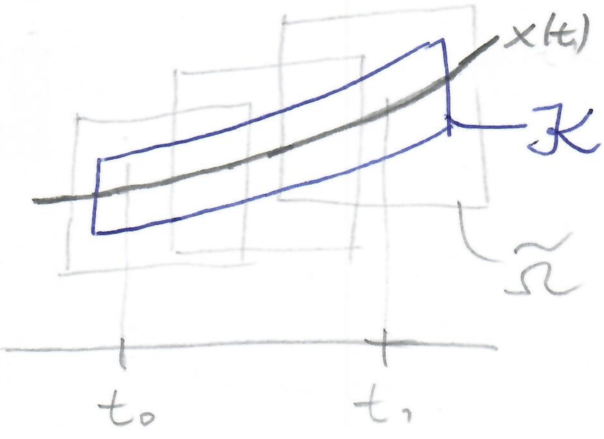
$$\gamma \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q_{\alpha_N} =: \tilde{\Omega},$$

f je L-lipschitzovské na $\tilde{\Omega}$

kde $L = \max\{L_{\alpha_1}, \dots, L_{\alpha_N}\}$.

otevřenost $\tilde{\Omega}$: $\exists \Delta > 0$ t.ž. $\mathcal{K} \subset \tilde{\Omega}$, kde

$$\mathcal{K} := \{(y, t);\ t \in [t_0 - \Delta, t_1 + \Delta],\ |y - x(t)| \le \Delta\}$$



BÚNO $|f| \le C_0$ na $\mathcal{K}$

(kompaktnost)

2. KROK vol $\delta < \frac{\Delta}{2(C_0+1)} \exp(-L|I|)$,

kde $I = [t_0 - \Delta, t_1 + \Delta]$,

$|I|$ ... délka I

nechť $y(t) = \varphi(t, \tau_0, y_0)$ je maximální řešení,

splňující $y(\tau_0) = y_0$, kde

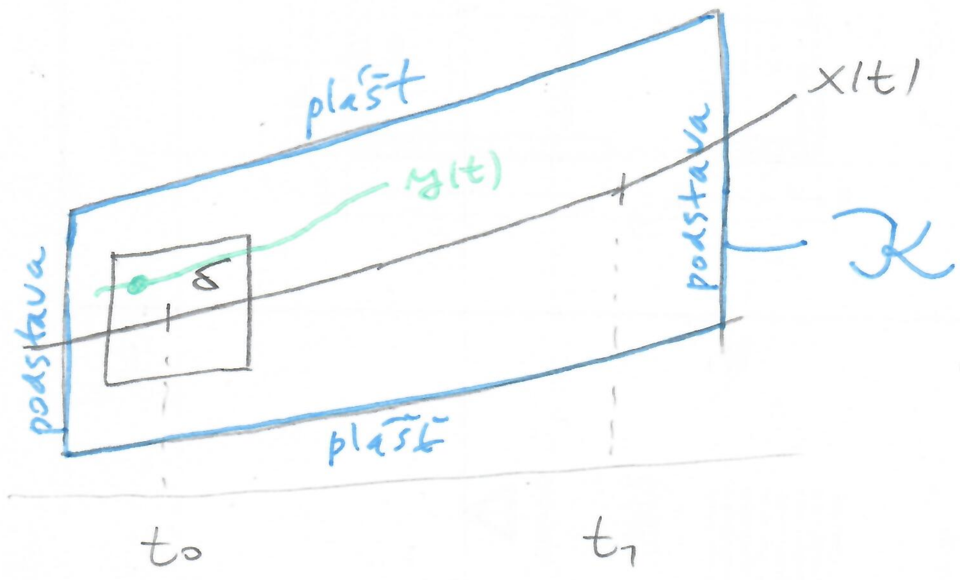
$|t_0 - \tau_0| < \delta$, $|x_0 - y_0| < \delta$

Věta 3.2 $\Rightarrow$ $y(t)$ opustí $\mathcal{K}$

klíčový odhad: neopustí skrze „zeď" ($|y - x(t)| = \Delta$)

(viz (i), (ii)) jí opustí „podstavami" ($t = t_0 - \Delta, t_1 + \Delta$)

může ($\Rightarrow$ jsem hotov, viz KROK 3)



(i) $$|x(\tau_0) - y(\tau_0)| \le \underbrace{|x(\tau_0) - x(t_0)|}_{\le \delta \cdot C_0} + \underbrace{|\overset{x_0}{x(t_0)} - \overset{y_0}{y(\tau_0)}|}_{< \delta}$$

(neboť $|x'| \le C_0$ díky $|f| \le C_0$)

tedy celkem $\le (C_0 + 1) \cdot \delta$

(ii) Sporem: buď $\tilde{t} \in I$ nejbližší takové, že

$$|x(\tilde{t}) - y(\tilde{t})| = \Delta, \quad \text{tedy } |x(t) - y(t)| \le \Delta$$

pro $t \in [\tau_0, \tilde{t}]$.

Tj. grafy $x(t)$, $y(t)$ leží v $\mathcal{K} \subset \tilde{\Omega}$, kde je f L-lipschitzovské

Lemma 4.1 $\Rightarrow$

$$|x(t) - y(t)| \le \underbrace{|x(\tau_0) - y(\tau_0)|}_{\le (C_0+1)\cdot\delta} \cdot \exp\big(L \underbrace{|t - \tau_0|}_{\le |I|}\big)$$

speciálně

$$|x(\tilde{t}) - y(\tilde{t})| \le \delta \cdot (C_0+1) \cdot \exp(L|I|) \le \frac{\Delta}{2},$$

SPOR

3. KROK: ukázali jsme: je-li $|\tau_0 - t_0|, |y_0 - x_0| < \delta$, má $y(t) = \varphi(t, \tau_0, y_0)$ smysl určitě pro $t \in I$,

speciálně $\mathcal{U}(t_1, \Delta) \times \mathcal{U}(t_0, \delta) \times \mathcal{U}(x_0, \delta) \subset \mathcal{D}$,

dále: $|x(t) - y(t)| = |\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, \tau_0, y_0)| < \Delta$

pro všechna $t \in I$, speciálně pro $t \in \mathcal{U}(t_1, \Delta)$.

$\Rightarrow$ otevřenost $\mathcal{D}$, spojitost φ.

Označme pro účely následující věty $\frac{\partial}{\partial w}$ derivaci ve směru $w \in \mathbb{R}^n$ dle proměnné x_0.

Věta 4.3. Nechť $f \in C \cap C^1_x(\Omega)$. Potom existuje $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ všude v $\mathcal{D}$. Označíme-li $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, pak $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ je řešením „rovnice ve variacích“

$$u' = \nabla_x f(x(t), t)u, \qquad u(t_0) = w \tag{1}$$

Důkaz. Při pevném t_0, x_0 a malém $h > 0$ označíme

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0) \tag{2}$$
$$y(t) = \varphi(t; t_0, x_0 + hw) \tag{3}$$
$$\eta(t) = \frac{y(t) - x(t)}{h} - u(t) \tag{4}$$

kde $u(t)$ je řešení (1). To je dobře definované, neboť jde o lineární homogenní rovnici s maticí

$$A(t) = \nabla_x f(x(t), t) \tag{5}$$

která je spojitá vůči t. Ukážeme, že $\eta(t) \to 0$ pro $h \to 0$, a to dokonce stejnoměrně vůči $t \in [t_0, t_1]$, kde $t_1 > t_0$ je libovolné, pevné.
1. Předběžné úvahy. V celém důkazu t_0, t_1, x_0, w je pevné a BÚNO předpokládáme, že $h > 0$ je tak malé, že grafy $x(t)$, $y(t)$ se nacházejí v nějakém kompaktu $\mathcal{K}$, na kterém platí:

$$|f| \le c_0, \quad \|\nabla_x f\| \le c_1 \tag{6}$$

a také $f(x, t)$ je (globálně) lipschitzovská vůči x. Odsud též plyne, že pro vhodné $c_2 > 0$ je

$$|x(t) - y(t)| \le c_2|h|, \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \tag{7}$$

2. Rovnice pro $\eta(t)$. Předně jest

$$\left(\frac{y(t) - x(t)}{h}\right)' = \frac{1}{h}\big(f(y(t), t) - f(x(t), t)\big)$$

Pro pevné t lze rozepíšeme pravou stranu

$$\begin{aligned} f(y(t), t) - f(x(t), t) &= \Big[f(x(t) + \theta(y(t) - x(t)), t)\Big]_{\theta=0}^{\theta=1} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta}\Big[f(x(t) + \theta(y(t) - x(t)), t)\Big] d\theta \\ &= \int_0^1 \Big[\nabla_x f\big(x(t) + \theta(y(t) - x(t)), t\big)\Big]\big(y(t) - x(t)\big)\, d\theta \end{aligned}$$

Odsud tedy

$$\begin{aligned} \left(\frac{y(t) - x(t)}{h}\right)' &= \int_0^1 \Big[\nabla_x f\big(x(t) + \theta(y(t) - x(t)), t\big)\Big] \left(\frac{y(t) - x(t)}{h}\right) d\theta \\ &= \Big[\nabla_x f(x(t), t)\Big] \left(\frac{y(t) - x(t)}{h}\right) + z(t, h) \end{aligned}$$

kde

$$z(t,h) = \int_0^1 \left[\nabla_x f\Big(x(t) + \theta(y(t) - x(t)), t\Big) - \nabla_x f(x(t), t)\right] \left(\frac{y(t) - x(t)}{h}\right) d\theta \qquad (8)$$

S ohledem na (1), (9) dostáváme konečně, že funkce $\eta(t)$ je řešením rovnice

$$\eta'(t) = \Big[\nabla_x f(x(t), t)\Big]\eta(t) + z(t,h) \qquad (9)$$

Protože

$$\eta(t_0) = \frac{y(t_0) - x(t_0)}{h} - u(t_0) = \frac{x_0 + hw - x_0}{h} - w = 0$$

vypadá (9) v integrálním tvaru jako

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t \big[\nabla_x f(x(s), s)\big]\eta(s)\, ds + \int_{t_0}^t z(s,h)\, ds \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \qquad (10)$$

<u>3. Odhady - Gronwall.</u> Z (10) můžeme odhadovat

$$|\eta(t)| \leq \int_{t_0}^t \big\|\nabla_x f(x(s), s)\big\| |\eta(s)|\, ds + \int_{t_0}^t |z(s,h)|\, ds$$

S ohledem na (6) tedy

$$|\eta(t)| \leq \int_{t_0}^t c_1 |\eta(s)|\, ds + Z(h) \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$$

kde

$$Z(h) = \max_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^t |z(s,h)|\, ds = \int_{t_0}^{t_1} |z(s,h)|\, ds \qquad (11)$$

Gronwallovo lemma implikuje

$$|\eta(t)| \leq K(h) \exp(c_1 |t - t_0|), \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \qquad (12)$$

a budeme hotovi, ukážeme-li, že $K(h) \to 0$ pro $h \to 0$.
Leč to je již snadné: s ohledem na (8), můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} K(h) &= \int_{t_0}^{t_1} |z(s,h)|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \big\|\nabla_x f\big(x(s) + \theta(y(s) - x(s)), s\big) - \nabla_x f(x(s), s)\big\| \left|\frac{y(s) - x(s)}{h}\right| d\theta ds \end{aligned}$$

Integrand vpravo je omezený díky (6), (7) a jde bodově do nuly, pro $h \to 0$, díky (7) a spojitosti $\nabla_x f$. Tedy integrál jde do nuly z Lebesgueovy věty.