3. Maximální řešení

Pozn. „řešení" ... řešení rce (1.1) v Ω, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ v celé kapitole pevné.
(x, I)

Def. (x, I) prodloužení $(\hat{x}, \hat{I})$: $I \subset \hat{I}$

$$\hat{x}(t) = x(t), \ \forall t \in I$$

(x, I) maximální: $\nexists$ netriviální (tj. $I \subsetneq \hat{I}$) prodloužení

Věta 3.1 Každé řešení má (aspoň jedno) maximální prodloužení.

Dk. $(x, (a,b))$ dáno ... sestrojíme $(\tilde{x}, (a, \beta))$, $\beta \geq b$ prodloužení doprava maximální

indukcí: $(x_0, (a, b_0)) := (x, (a, b))$

$(x_n, (a, b_n))$ ... dáno, polož:

$$\omega_n = \sup\{\tilde{b} \geq b_n ; \exists \text{ prodloužení na } (a, \tilde{b})\}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} 1 + b_n, & \omega_n = +\infty \\ \frac{1}{2}(\omega_n + b_n), & \omega_n < +\infty. \end{cases}$$

zvol: x_{n+1} ... nějaké prodloužení x_n na (a, b_{n+1})
($\exists$ neboť $b_{n+1} < \omega_n$).

---

zřejmě $b_n \leq b_{n+1}$ ... $\exists \lim\limits_{n \to \infty} b_n =: \beta$

pro $t \in (a, \beta)$ polož $\tilde{x}(t) = x_n(t)$, kde n je libovolné t.ž. $b_n > t$
(korektní, nezávisí na n)

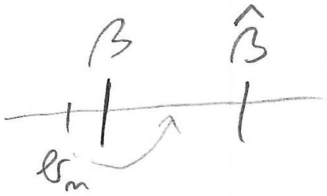
sporem: $(\tilde{x},(a,\beta))$ je maximální.

?? $\exists$ prodloužení $(\hat{x},(a,\hat{\beta}))$, $\hat{\beta}>\beta$ ..

nutně $\beta<+\infty$, tedy $\omega_n<+\infty$ (od jistého n)

ale: $(\hat{x},(a,\hat{\beta}))$ je prodloužení $(x_n,(a,b_n))$, pro $\forall n$

tedy $\omega_n \geq \hat{\beta}$, nicméně



$$b_{n+1} \geq \frac{1}{2}(\omega_n + b_n)$$

$$\omega_n \leq 2b_{n+1} - b_n \to \beta \ (<\hat{\beta}), \text{ SPOR.}$$

Lemma 3.1 Řešení (x,I), $I=(a,b)$ lze prodloužit za bod b, právě když (i) $b<+\infty$

(ii) $\exists \lim_{t\to b-} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

(iii) $(x_0,b)\in\Omega$.

Dk. „$\Rightarrow$" nechť $\exists$ $(\hat{x},\hat{I})$ řešení (v Ω) t.ž.

$b\in\hat{I}$, $x(t)=\hat{x}(t)$ $\forall t\in(a,b)$

... jistě (i)–(iii) platí.

„$\Leftarrow$" užiji Větu 1.1 pro bod $(x_0,b)\in\Omega$

$\exists$ řešení $y(t):(b-\delta,b+\delta)\to\mathbb{R}^n$

$y(b)=x_0$

definuji prodloužení (spojité řešení) $\hat{x}(t)=\begin{cases} x(t), & t\in(a,b) \\ y(t), & t\in[b,b+\delta) \end{cases}$

Věta 3.2 $K \subset \Omega$ kompaktní, (x, I) maximální řešení, $(x(t_0), t_0) \in K$ pro $t_0 \in I$

$\Rightarrow (x(t), t)$ opustí K pro jisté $t_1 > t_0$

a též pro $t_2 < t_0$.

dk. ?? nechť $(x(t), t) \in K$ pro $\forall t \in [t_0, b)$,

kde $I = (a, b)$

- nutně $b < +\infty$ (omezenost K).
- tvrdím: $\exists \lim_{t \to b-} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

dk: po složkách: $x_j' = f_j(x(t), t) \geq -M$,

neboť f_j omezené na $K \ni (x(t), t)$

$$x_j(t) = (Mt + x_j(t)) - Mt = u_j(t) - v_j(t)$$

omezené, monotónní

$(u_j' = x_j' + M \geq 0)$

$\Rightarrow \exists$ vlastní $\lim_{t \to b-} x_j(t)$, $\forall j = 1, \dots n$

a tedy: $x(t) \to x_0 \in \mathbb{R}^n$

celkem tedy $(x(t), t) \to (x_0, b) \in K \subset \Omega$

L. 3.1 $\rightarrow$ lze prodloužit za bod $t = b$

SPOR

Důsl. (x, I), $I = (a, b)$ ... maximální řešení $x' = f(x)$
(autonomní rovnice)

$x(t_0) \in K \subset \mathbb{R}^n$, kompaktní.

$\Rightarrow$ buď $b = +\infty$, nebo $\exists\, t_1 > t_0$ s.ř.

$x(t_1) \notin K$.

Dk. nechť $b < +\infty$: polož $\mathcal{K} = [t_0, b] \times K$

aplikuj Věta 3.2