Věta 1.1 [Princip maxima]

nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřené, omezené

nechť $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u \geq 0$ v Ω.

Pak jest $\underbrace{\max_{\overline{\Omega}} u}_{} = \underbrace{\max_{\partial\Omega} u}_{}$.

dk. označme: M m

$\left(\exists \text{ maxim} \Leftarrow \overline{\Omega}, \partial\Omega \text{ omezené, uzavř. } \atop u \text{ spojité} \quad \text{kompaktní} \right)$

zřejmě platí $M \geq m$, ukažme $M \leq m$

KROK 1 nechť navíc $\Delta u > 0$ v Ω

?? $M > m$: $\exists x_0 \in \overline{\Omega} : u(x_0) = M > m$,

nutně $x_0 \in B(x_0, \delta) \subset \Omega$

$\Rightarrow \nabla u(x_0) = \underline{0}$, tj. $\forall j \ \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = 0$

dále: $\Delta u(x_0) > 0 \Rightarrow \exists j \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_0) > 0$

pomocná fce: $\varphi(t) = u(x_0 + t e^j)$

kde $t \in (-\delta, \delta)$

$e^j = (0, \ldots 1, 0, \ldots)$

dle výše řečeného: $\varphi'(0)=0$

$$\varphi''(0)>0$$

$$\Rightarrow \varphi(t)>\overbrace{\varphi(0)}^{u(t_0)} \text{ pro } \forall t\neq 0,$$ máme

tedy to není (ani lokální) extrém

<u>KROK 2</u> nechť obecně $\Delta u \geq 0$ v Ω

pomocná fce: $\tilde{u}(x)=u(x)+\varepsilon e^{x_1}$,

$\varepsilon>0$ libovolné

zřejmě $\tilde{u}\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, a platí

$$\Delta\tilde{u}=\underbrace{\Delta u}_{\geq 0}+\underbrace{\Delta(\varepsilon e^{x_1})}_{\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}e^{x_1}>0}>0 \text{ v } \Omega$$

dle KROKU 1: $\boxed{\max_{\overline{\Omega}}\tilde{u}\leq\max_{\partial\Omega}\tilde{u}}$

nyní: LS $\geq$ Π = $\overline{\Omega}$ u, neboť

$u<\tilde{u}$ v $\overline{\Omega}$

$PS \leq m + \varepsilon C$, $m = \sup_{\partial\Omega} u$,

$$C = \max_{\partial\Omega} e^{x_1}$$

neboť $\tilde{u} = u + \varepsilon e^{x_1} \leq u + \varepsilon C$ na $\partial\Omega$

$\Rightarrow M \leq m + \varepsilon C$, $\varepsilon \to 0+$.

<u>Lemma I.1.</u> [O sférických průměrech.]

Nechť $u \in C^1(\Omega)$, nechť $B(x_0, R) \subset \Omega$.

Označme $\phi(t) = \fint_{S(x_0,t)} u \, d\sigma$, $t \in (0, R)$.

Potom platí:

<u>1.</u> $\phi'(t) = \fint_{S(x_0,t)} \nabla u \cdot n \, d\sigma$, $t \in (0, R)$

<u>2.</u> $\lim_{t \to 0+} \phi(t) = u(x_0)$

<u>Dk. 1</u> $\phi(t) = \frac{1}{\beta_d t^{d-1}} \int_{S(x_0,t)} u(x) \, d\sigma(x)$ $\left|\begin{array}{l} x = x_0 + tz \\ z \in S(0,1) \\ d\sigma(x) = t^{d-1} d\sigma(z) \end{array}\right.$

$$= \frac{1}{\beta_d} \int_{S(0,1)} u(x_0 + t r)\, d\sigma(r) \qquad \Big| \ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = \frac{1}{\beta_d} \int_{S(0,1)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} u(x_0 + t r)}_{\nabla u(x_0 + t r) \cdot r}\, d\sigma(r)$$

zpětné substituce

$$= \frac{1}{\beta_d t^{d-1}} \int_{S(x_0,t)} \nabla u(x) \cdot \underbrace{\frac{x - x_0}{t}}_{n}\, d\sigma(x)$$

2.) $\phi(t) = \fint_{S(0,1)} u(x_0 + \underbrace{t r}_{\to 0})\, d\sigma(r)$

$t \to 0$

$$\downarrow$$

$$\fint_{S(0,1)} u(x_0)\, d\sigma(r) = u(x_0)$$

Věta I.2 [O průměru harm. fce.]

Nechť u je harmonická v Ω.

Pak pro $\forall\, B(x_0,r) \subset \Omega$ platí:

$$u(x_0) \overset{(i)}{=} \fint_{S(x_0,r)} u \, d\sigma \overset{(ii)}{=} \fint_{B(x_0,r)} u \, dx.$$

---

dk. ad (i) ... nechť $\phi(t)$, $t \in (0,r)$ je jako v L. I.1

$$\phi'(t) = \frac{1}{\beta_d t^{d-1}} \underbrace{\int_{S(t_0,r)} \nabla u \cdot n \, d\sigma}$$

... Gaussova věta pro $\Omega = B(x_0,t)$,

$\underset{\sim}{F} = \nabla u$, tj. $\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = \Delta u$

$$= \int_{B(x_0,t)} \Delta u \, dx = 0,$$

$\Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}$ t.ž. $\phi(t) = C$, $\forall t \in (0,r)$

tedy též $C = \lim_{t \to 0+} \Phi(t) = u(x_0)$

---

ad ii) sférické Fubiniho věty:

$$\int_{B(x_0,r)} u \, dx = \int_0^r \Big(\underbrace{\int_{S(x_0,t)} u \, d\sigma}_{} \Big) dt$$

dle (i): $\underbrace{\sigma(S(x_0,t))}_{\substack{\shortparallel \\ \beta_d t^{d-1}}}$ $\quad \underbrace{⨍_{S(x_0,t)} u \, d\sigma}_{u(x_0)}$

$$= \int_0^r \beta_d t^{d-1} u(x_0) \, dt$$

$$= \underbrace{d \beta_d r^d}_{\lambda(B(x_0,r))} u(x_0)$$

Věta I.3. [Silný princip maxima.]

KROK 1 $\quad B(x_0,R) \subset \Omega,\ u(x_0) = \underbrace{\sup_{\Omega} u}_{M}$

$$\Rightarrow\ u \equiv M \text{ v } B(x_0,R)$$

dk. $\quad 0 = u(x_0) - M = \fint_{B(x_0,R)} u \, dx - M$

$$= \fint_{B(x_0,R)} \underbrace{(u-M)}_{\le 0} dx \le 0$$

nutně tedy: $\displaystyle\int_{B(x_0,R)} (u-M)\, dx = 0$

a tedy: $u \equiv M$ v $B(x_0,R)$

Věta I.4. [Harnack]

KROK 1. $\Omega' = B(x_0, R)$, kde $B(x_0, 4R) \subset \Omega$

buďte $x_1, x_2 \in B(x_0, R)$ libovolné:

vidíme, že
$$\boxed{\begin{array}{ll} B(x_1, R) \subset B(x_0, 2R) & (i) \\ B(x_0, 2R) \subset B(x_2, 3R) & (ii) \end{array}}$$

ad i) $y \in B(x_1, R) \Rightarrow |x_1 - y| < R$

tedy $|x_0 - y| \leq \underbrace{|x_0 - x_1|}_{<R} + \underbrace{|x_1 - y|}_{<R} < 2R$

tj. $y \in B(x_0, 2R)$

ad ii) $y \in B(x_0, 2R) \Rightarrow |x_0 - y| < 2R$

tedy $|x_2 - y| \leq \underbrace{|x_2 - x_0|}_{R} + \underbrace{|x_0 - y|}_{2R} < 3R$

tj. $y \in B(x_2, 3R)$

... a nyní odhadujeme:

$$u(x_1) = \fint_{B(x_1,R)} u\,dx = \frac{1}{\alpha_d R^d}\int_{B(x_1,R)} u\,dx \le \frac{1}{\alpha_d R^d}\int_{B(x_0,2R)} u\,dx$$

díky (i), $u \geq 0$

$$u(x_2) = \fint_{B(x_2,3R)} u\,dx = \frac{1}{\alpha_d (3R)^d}\int_{B(x_2,3R)} u\,dx \geq \frac{1}{\alpha_d (3R)^d}\int_{B(x_0,2R)} u\,dx$$

díky (ii), $u \geq 0$

CELKEM: $\boxed{u(x_1) \le 3^d u(x_2)}$

Věta I.5 [Liouville].

Nechť u je harmonické, zdola nebo shora omezené v $\mathbb{R}^d$. Pak je konstantní.

Dk. KROK 1: nechť platí $u \geq 0$ v $\mathbb{R}^d$

buď $R > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ libovolné,

označ $\rho = |x - y|$

zřejmě $x \in B(y, R+\rho)$, a tedy:

$$u(x) = \fint_{B(x,R)} u = \frac{1}{\alpha_d R^d} \int_{B(x,R)} u \leq \frac{1}{\alpha_d R^d} \int_{B(y,R+\rho)} u$$

$$= \frac{1}{\alpha_d R^d} \cdot \alpha_d (R+\rho)^d \underbrace{\fint_{B(y,R+\rho)} u}_{= u(y)}$$

$$\Rightarrow u(x) \leq \left(1 + \rho/_R\right)^d u(y) \quad / R \to +\infty$$

$\boxed{u(x) \leq u(y)}$; symetricky „$\geq$".

KROK 2,

zdola omezené: $\exists C$ t.ž. $u(x) \geq C, \forall x$

položme $\tilde{u}(x) = u(x) - C$

shora omezené: $\exists C$ t.ž. $u(x) \leq C, \forall x$

položme $\tilde{u}(x) = C - u(x)$

v obou případech $\tilde{u} \geq 0$, harmonické

tedy (KROK 1) $\tilde{u}$ konst. $\Rightarrow u$ konst.