

1. Pomocí Fourierovy transformace vyřešte rovnici

$$-\partial_{xx}u + a^2u = \delta_0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Nápomoc: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \pi \exp(-2\pi|y|)$.

2. Najděte vlastní čísla a vlastní funkce pro rovnici s danými okrajovými podmínkami:

$$\partial_{xx}u + \lambda u = 0 \quad x \in (0, a) \quad (1)$$

$$u(0) = u(a) = 0 \quad (2)$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní funkce pro rovnici s danými okrajovými podmínkami:

$$\partial_{xx}u + \lambda u = 0 \quad x \in (0, a) \quad (3)$$

$$\partial_x u(0) = \partial_x u(a) = 0 \quad (4)$$

4. Najděte vlastní čísla a vlastní funkce pro rovnici s danými okrajovými podmínkami

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{v } \partial Q \quad (5)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial Q \quad (6)$$

na čtverci $Q = (0, a) \times (0, b)$.

5. Najděte vlastní čísla a vlastní funkce pro rovnici s danými okrajovými podmínkami:

$$\partial_{xx}u + \lambda u = 0 \quad x \in (0, a) \quad (7)$$

$$u(0) = \partial_x u(a) = 0 \quad (8)$$

Řešení na druhé straně.

1. $\hat{u}(y) = \frac{1}{4\pi^2 y^2 + a^2}$; $u(x) = e^{-a|x|}/2a$.
2. $u_n = \sin(n\pi x/a)$, $\lambda_n = (n\pi/a)^2$, $n = 1, 2, \dots$
3. $u_n = \cos(n\pi x/a)$, $\lambda_n = (n\pi/a)^2$, $n = \mathbf{0}, 1, \dots$
4. Ansatz: $u(x, y) = X(x)Y(y)$, $u_{mn} = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$,
 $\lambda_{mn} = \pi^2((m/a)^2 + (n/b)^2)$, $m, n = 1, 2, \dots$