§7. DIRICHLETOVY ÚLOHY V KRUHOVĚ SYMETRICKÝCH PŘÍPADECH PROSTORU E_2

7.1. ÚLOHA NA MEZIKRUŽÍ $K_{a,b} \subset E_2$

Uvažujme mezikruží $K_{a,b} \subseteq E_2$, $\infty > b > a > 0$. Nechť u je řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici $-\Delta u = 0$ na $K_{a,b}$ a místo kartézských souřadnic uvažujme vhodnější polární souřadnice (radiální a azimutální složku).[45] Schématicky to zapíšeme $u(x,y) = v(r,\varphi)$. Okrajové podmínky na $\partial K_{a,b} = S_a \cup S_b$ nechť jsou zadány 2π-periodickými funkcemi f, g (azimutálních souřadnic), které patří do $C(E_1)$ a jsou po částech spojitě derivovatelné. Jelikož g, $f|_{\langle 0;2\pi\rangle}$ jsou spojité funkce definované na uzavřeném intervalu, existuje integrál definující jejich Fourierovy koeficienty. Zároveň vzhledem k hladkostem těchto funkcí se obě rovnají své Fourierově řadě ve všech bodech. Okrajové podmínky proto můžeme zapsat pomocí Fourierovy řady takto:

$$v(a,\varphi) = f(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\varphi}, \qquad v(b,\varphi) = g(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{in\varphi}, \ \varphi \in E_1,$$

kde a_n, $b_n \in \mathbb{C}$ jsou Fourierovy koeficienty funkcí f, g vzhledem k ortogonálnímu systému $e^{in\varphi}$. Laplaceův operátor v polárních souřadnicích (připomeňte si) je vyjádřen

$$\Delta = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}.$$

V teorii parciálních diferenciálních rovnic se ukazuje (viz např. [20], [42]), že $v(r,.)$ je pro každé $r \in (a;b)$ dvakrát spojitě diferencovatelná a periodická funkce na intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$, proto existují pro každé $r \in (a;b)$ Fourierovy koeficienty $R_n(r)$ vzhledem k systému $e^{in\varphi}$ na intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$. Ve smyslu bodové konvergence pak platí $v(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} R_n(r)e^{in\varphi}$. Jelikož u splňuje Laplaceovu rovnici, platí $0 = \Delta u = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)v + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}v$. Dosadíme-li za v předchozí vyjádření ve Fourierově rozvoji a zaměníme-li formálně derivaci a sumu, dospějeme k

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\varphi}\,\frac{1}{r}\,\partial_r\big(r\partial_r R_n(r)\big) - \frac{1}{r^2}\,R_n(r)\,n^2 e^{in\varphi}.$$

[45] Singularita polárních souřadnic pro $r = 0$ nám nevadí, neboť $a > 0$.

Jelikož $e^{in\varphi}$ je úplný ortogonální systém, tak přímo z definice těchto pojmu obdržíme[46] rovnice $r(rR_n')' - n^2 R_n = 0$, neboli

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0 .$$

Užijeme-li ansatz $R_n = r^\lambda$, dostaneme charakteristickou rovnici pro tuto (Eulerovu) diferenciální rovnici $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2 = 0$, z čehož plyne $\lambda^2 - n^2 = 0$, tedy $\lambda_{1,2} = \pm|n|$, což nám umožní ihned psát řešení. Jedinou výjimku tvoří $n = 0$, kdy dostaneme $r(rR_0')' = 0 \Rightarrow rR_0' = A \Rightarrow R_0' = \frac{A}{r} \Rightarrow R_0 = A \ln r + B$, kde A, B jsou konstanty. Zavedením vhodného označení pro koeficienty lze tedy fundamentální systém řešení pro $R_n(r)$ psát ve tvaru:

$$R_n = A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|}\,, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,,$$
$$R_0 = A_0 + B_0 \ln \tfrac{1}{r}$$

a ansatz řešení naší Dirichletovy úlohy má pak tvar

$$v(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln \frac{1}{r} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|}\right) e^{in\varphi} . \qquad (3.42)$$

Nyní užijme okrajové podmínky k určení neznámých koeficientů A_n, B_n pomocí koeficientů a_n, b_n, známých z rozvojů funkcí f, g. Díky úplnosti ortogonálního systému $e^{in\varphi}$ stačí srovnat koeficienty u stejných prvků ortogonálního systému v rovnicích $v(a, \cdot) = f$, $v(b, \cdot) = g$. Pro každé pevné $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ máme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé A_n, B_n:

$$A_n a^{|n|} + B_n a^{-|n|} = a_n\,,$$
$$A_n b^{|n|} + B_n b^{-|n|} = b_n\,,$$

zatímco pro A_0, B_0 máme soustavu:

$$A_0 + B_0 \ln \tfrac{1}{a} = a_0\,,$$
$$A_0 + B_0 \ln \tfrac{1}{b} = b_0\,.$$

Jelikož pro determinanty soustav díky $b > a$ platí $D_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{|n|} - \left(\frac{a}{b}\right)^{|n|} = \left(\frac{a}{b}\right)^{|n|} \left(\frac{b^{2|n|} - a^{2|n|}}{a^{2|n|}}\right) > 0$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a $D_0 = \ln \frac{b}{a} > 0$, má dle Cramerova pravidla každá (tj. pro každé pevné $n \in \mathbb{Z}$) soustava jediné řešení a koeficienty A_n, B_n ve vyjádření (3.42) jsou tedy okrajovými podmínkami f, g jednoznačně určeny.

---

[46] Koeficienty u $e^{in\varphi}$ jsme navíc vynásobili r^2.

Poznámka (o souvislosti s funkcemi holomorfními na mezikruží): Z teorie funkcí komplexní proměnné je známo, že funkce holomorfní na mezikruží jsou právě ty, které lze napsat ve tvaru Laurentovy řady. Navíc připomeňme, že reálná i imaginární složka holomorfní funkce splňuje Laplaceovu rovnici. Naopak platí, že každá reálná harmonická funkce je „lokálně" složkou holomorfní funkce. Proto snad není tak překvapivé, že jsme řešení obdrželi právě jakousi „Laurentovu řadu", tedy řadu obsahující jak kladné tak záporné mocniny r (i když ve skutečnosti to žádná Laurentova řada není).

Předchozí úvahy nyní aplikujeme na kruh, který lze s drobnými omezeními ve výše uvedeném postupu považovat ze zdegenerované mezikruží.

7.2. Úloha na kruhu $K_a \subset E_2$

Jelikož pro tento typ oblasti je užitá transformace kartézských souřadnic do polárních singulární (pro $r = 0$), uvážíme nejprve mezikruží, jehož vnitřní poloměr bude posléze degenerovat k nule. Skutečnost, že hledáme omezené řešení, nás vede k tomu, že ve vztahu pro mezikruží (3.42) položíme nule koeficienty $B_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, u členů, které jsou v okolí nuly neomezené. Tím odstraníme singularity v rozvoji funkce $v(r,\varphi)$ nejen v nulté, ale i v první a druhé derivaci, a můžeme rovněž poslat k nule vnitřní poloměr mezikruží. Získáme tak ansatz pro hledané řešení na kruhu:

$$v(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n r^{|n|} e^{in\varphi}\,.$$

Neznámé koeficienty A_n opět najdeme stejně jako výše z okrajové podmínky

$$v(a,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{in\varphi} a^{|n|} = f(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\varphi}\,.$$

Opět dík úplnosti ortogonálního systému dostaneme, že $A_n a^{|n|} = a_n$, odkud $A_n = a_n/a^{|n|}$, a proto

$$v(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\varphi}\,. \tag{3.43}$$

Toto je jedno z možných vyjádření řešení Dirichletovy úlohy na kruhu. Můžeme však odvodit ještě jeden tvar, užijeme-li vztah pro výpočet Fourierových koeficientů: $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,e^{-in\alpha}\,d\alpha$. Dosadíme tento vztah do výrazu pro $v(r,\varphi)$ a dostaneme (ověřte splnění podmínek pro záměnu integrálu a sumy)

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in(\varphi-\alpha)}\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|}\,d\alpha\,.$$

Řadu v integrandu lze sečíst. Označme $0<\lambda \overset{\text{df}}{=} \frac{r}{a} < 1$. Platí

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\varphi}\lambda^{|n|} = \operatorname{Re}\Big(-1+2\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi}\lambda^{|n|}\Big) =$$

$$= \operatorname{Re}\Big(-1+\frac{2}{1-\lambda e^{i\varphi}}\Big) = \operatorname{Re}\frac{1+\lambda e^{i\varphi}}{1-\lambda e^{i\varphi}} = \frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos\varphi+\lambda^2}\,.$$

Při výpočtu reálné části jsme nakonec zlomek s výhodou rozšířili výrazem $1-\lambda e^{-i\varphi}$. Vrátíme se od λ zpět k r, a a místo φ píšeme $\varphi-\alpha$:

$$\sum_{n\in Z} e^{in(\varphi-\alpha)}\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} = \frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\alpha)+r^2}\,. \qquad (3.44)$$

Dosadíme-li tento výraz do vztahu pro v, máme

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\alpha)+r^2}\,d\alpha\,, \quad |r|<a\,, \qquad (3.45)$$

což je řešení Laplaceovy rovnice pro kruh vyjádřené pomocí konvoluce s tzv. *Poissonovým jádrem.*

Poznámka (opakování o záměně limity a integrálu): Předpokládejme, že $f(\varphi)$ je konstantní jednotka. Budeme počítat limitu hodnot $v(r,\varphi)$ podle vztahu (3.45) pro $r\to a-$ a výsledek srovnáme s $f(\varphi)$.

Označme předně $\widetilde{v}_0(r,\varphi) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\varphi+r^2}$. Platí $\lim_{r\to a-}\widetilde{v}_0(r,\varphi) = 0$, pokud $\varphi\neq 2k\pi$. Pokud ovšem $\varphi=2k\pi$, pak $\lim_{r\to a-}\widetilde{v}_0(r,\varphi)=\infty$. Kdybychom chtěli ověřit platnost okrajových podmínek záměnou limity a integrálu ve vztahu (3.45), museli bychom ověřit, jsou-li splněny předpoklady příslušné (Lebesgueovy) věty: označíme Poissonovo jádro podle vztahu (3.44) symbolem $v(\alpha,r,\varphi)$ a zvolíme pevné $\varphi\in\langle-\pi;\pi\rangle$. Podle předchozího rozboru existuje pro s.v. $\alpha\in\langle-\pi;\pi\rangle$ (s výjimkou $\alpha=\varphi$) nulová $\lim_{r\to a-} v(\alpha,r,\varphi)$, a proto je podmínka o existenci limity v integrované funkci splněna. Pro každé $r\in(0;a)$ je funkce $v(\alpha,r,\varphi)$ lebesgueovsky měřitelná na $\langle-\pi;\pi\rangle\ni\alpha$, neboť jmenovatel je nula, právě když $r^2+a^2=2ar\cos(\varphi-\alpha)$, tedy $\frac{1}{2}(\frac{r}{a}+\frac{a}{r})=\cos(\varphi-\alpha)$. Podle nerovnosti