Problém. Vlastní čísla laplace na kruhu $B = \{x^2 + y^2 < 1\}$, neboli pro jaké λ existuje netriviální řešení

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{v } B \tag{1}$$
$$u = 0 \quad \text{na } \partial B \tag{2}$$

Nutně platí $\lambda > 0$ (násob rovnici u a integruj per-partes), tj. označme $\lambda = k^2$. Přejdeme k polárním souřadnicím $U = U(r,\varphi)$, kde $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + k^2 U = 0 \tag{3}$$

Ansatz. Hledejme řešení ve tvaru $U = R(r)\Phi(\varphi)$, po úpravách

$$\frac{r^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} + r^2 k^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \tag{4}$$

Úvaha: LS závisí jen na r, PS jen na φ, tj. obě se musí rovnat stejné konstantě, kterou označíme m^2. Proměnné se tak „odseparují":

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \tag{5}$$
$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r\frac{\partial R}{\partial r} + (k^2 r^2 - m^2)R = 0 \tag{6}$$

Rovnice (5) má řešení tvaru $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$; zapsáno komplexně $\exp(\pm i m\varphi)$, kde $m \geq 0$ je celé – potřebujeme, aby závislost na φ byla hladce 2π-periodická.
Pozn. Z téhož důvodu jsme mohli psát m^2, neboť pro $-m^2$ má rovnice (5) řešení tvaru $\cosh m\varphi$, $\sinh m\varphi$, která nejsou 2π-periodická.

Zbývá řešit rovnici (6) pro $m \geq 0$ celé, přičemž dané řešení by mělo být „rozumné" pro $r \to 0$ a splňovat $R(1) = 0$, čímž se zaručí (2).
Zavedeme substituci $kr = \rho$, tj. hledáme řešení ve tvaru $R(r) = Z(kr)$, kde $Z = Z(\rho)$ tedy splňuje

$$\rho^2 Z'' + \rho Z' + (\rho^2 - m^2)Z = 0 \tag{7}$$

– to je Besselova rovnice řádu m, jejíž řešení $J_m(\rho)$ je známo z přednášky. Podmínka

$$0 = R(1) = J_m(k) \tag{8}$$

nám předepisuje volbu k: volíme postupně $k = \alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots$, kde $\{\alpha_{mn}\}_n$ je posloupnost všech nulových bodů funkce J_m v intervalu $(0,\infty)$. Z přednášky víme, že tato posloupnost je nekonečná a dokonce téměř lineárně rostoucí pro velká n.

Shrnutí. Nalezli jsme (dvojitě indexovanou) posloupnost vlastních čísel $\lambda = \alpha_{mn}^2$ a k nim příslušných vlastních funkcí (v polárních souřadnicích) $u_{mn}(r,\varphi) = J_m(\alpha_{mn}\rho)\exp(\pm i m\varphi)$
Lze ukázat, že tyto funkce tvoří úplnou OG bázi $L^2(B)$ s vahou r; tj. v tomto smyslu jsme nalezli všechna vlastní čísla.