Lemma 21.1. [OG trig. systému]

(i) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0,$

pro $\forall n \neq 0$ celé

(ii) $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx)\,dx = 0,$

pro $\forall m, n \geq 0$ celé

(iii) $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx)\,dx$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

pro $\forall m, n \geq 1$ celé

---

dk. (i) d. cv.

(ii) pomocí vzorečku:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$L.S. = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x\,dx$$

$= 0$ díky bodu (i)

(Pozn.: $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0$ i pro $n=0$)

(iii) pomocí vzorců:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\sin(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(n-m)x}_{\substack{2\pi \text{ pro } n=m \\ 0 \text{ } n\neq m, \text{ opět dle (i)}}} - \underbrace{\cos(n+m)x}_{\substack{0 \text{ díky bodu (i),} \\ \text{neboť } n+m\neq 0}}\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\,dx \; \ldots \text{ analogicky}$$

Věta 21.1. [O tvaru Four. koef.]

Nechť (T) konverguje stejnoměrně $[0, 2\pi]$, nechť $f(t)$ je její součet.

Potom: $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin kx \, dx, \qquad \forall k \geq 1 \text{ celé}$$

---

dk. dle předpokladu: $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$

platí v $[0, 2\pi]$,

kde značíme:

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx \right]$$

odtud máme: $f_n(t) \cdot \sin lx \rightrightarrows f(t) \cdot \sin lx$

(l pevné) $f_n(t) \cdot \cos lx \rightrightarrows f(t) \cdot \cos lx$

Věta 16.2 $\Rightarrow$

$$S_n = \int_0^{2\pi} f_n(t) \cdot \sin lx \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin lx$$

$$C_n = \int_0^{2\pi} f_n(t) \cdot \cos lx \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos lx$$

---

avšak píšeme pro L.S. ... $S_n =$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] \right) \sin lx$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \sin lx}_{= 0} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \sin lx}_{= 0} \right.$$

$$\left. + b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin lx}_{\pi,\ k = l \quad 0,\ k \neq l} \right]$$

a tedy:

$S_n = \pi b_l$,

pokud BÚNO $n \geq l$

CELKEM: $S_n \to \pi b_l = \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx$

$$\Rightarrow \quad b_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx$$

analogicky pro a_l.

Lemma 21.2. [Komplexní tvar F.ř.]

dk. $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \underbrace{e^{-ikx}}_{= \cos(kx) - i \sin(kx)} dx$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx - i f(x) \sin kx \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} (a_k - i b_k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

nec. $k=0$: $C_0 = \frac{1}{2} a_0 - i \underbrace{b_0}_{=0}$

Inverzní těchto vztahů:

a_k, b_k pomocí c_k

ad částečné součty: $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k e^{ikx} + c_{-k} \cdot e^{-ikx} \right)$$

pozoruji: $\overline{c_k} = \overline{a_k - i b_k} = a_k + i b_k$

$= c_{-k}$

a tedy: $\overline{c_k e^{ikx}} = c_{-k} e^{-ikx}$

$$\Rightarrow \dots = c_0 + \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{Re} \left(c_k e^{ikx} \right)$$

avšak díky předchozímu:

$$2 c_k e^{ikx} = (a_k - i b_k) \cdot (\cos kx + i \sin kx)$$

$$= a_k \cdot \cos kx + b_k \sin kx$$

$$+ i \left(a_k \cdot \sin kx - b_k \cos kx \right)$$

a navíc: $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ... jsem hotov!!

Lemma 21.3 [Integrální vyj. F. ř.]

Nechť $f(x) \in L^1_{per}(0,2\pi)$, $n \geq 1$.

Pak $F_{f,n}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+r)\, D_n(r)\, dr$,

kde $D_n(r) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)r}{2\sin\frac{r}{2}}$.

Dk. dle L. 21.2 máme (x jsme)

$$F_{f,n}(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky}\, dy \right) e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} \right) dy$$

... substituce $y = x + r$, $dy = dr$

a posun mezí: $y \in (0, 2\pi) \longrightarrow r \in (-\pi, \pi)$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\underbrace{\left(\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}\right)}_{= D_n(t)}\,dt$$

a dále upravíme takto:

$$D_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\underbrace{\left(\cos(-kt) + i\cdot\sin(-kt)\right)}_{\text{sudé resp. liché vůči } k}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt$$

$\boxed{\text{TRIK}}$ $\sin\frac{t}{2}\cdot D_n(t) =$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{t}{2}\cdot\cos kt$$

víme: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\beta+\alpha) - \sin(\beta-\alpha)\right)$

$$\Rightarrow \sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

a tedy: $D_n(x) =$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$ ... teleskopické sumy!!

<u>Pozn.</u>: pro $\sin\frac{x}{2} = 0$ $(\Leftrightarrow x = 2l\pi)$

je $D_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} 1 = n + \frac{1}{2}$,

zřejmě: $D_n(x) \in C^{\infty}_{per}$.