Věta 13.1. Buď (X,ρ) m. z. Potom:

1. $\emptyset, X$ jsou otevřené

2. G_α otevř. $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ otevř.

3. $G_1, \dots, G_N$ otevř. $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{N} G_n$ otevř.

Dk. 1. $\underline{\forall x \in \emptyset}\ \exists \delta > 0 \dots$

... platí triviálně

$\forall x \in X\ \exists \delta > 0 : \underline{\mathcal{U}(x,\delta) \subset X}$

... platí vždy

2. buď $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in A$

t. ž. $x \in G_\alpha$

víme: G_α otevřené $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t. ž.

$\mathcal{U}(x,\delta) \subset G_\alpha$

a tím spíše $\mathcal{U}(x,\delta) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

3. buď $x \in \bigcap_{n=1}^{N} G_n \Leftrightarrow x \in G_n$ pro

$\forall n = 1, \dots, N$

G_n otevřené $\Rightarrow \exists\, \delta_n > 0$ t.ž.

$$\mathcal{U}(x, \delta_n) \subset G_n$$

položme $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\}$.

... zřejmě platí: $\delta > 0$

$$\mathcal{U}(x, \delta) \subset \mathcal{U}(x, \delta_n) \subset G_n,$$

pro $\forall n = 1, \dots, N$.

$$\Rightarrow \mathcal{U}(x, \delta) \subset \bigcap_{n=1}^{N} G_n.$$

<u>Věta 13.1!</u> Buď (X, ρ) m.p. Potom:

1. $\emptyset, X$ jsou uzavřené
2. F_α uzavř. $\forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ uzavř.
3. $F_1, \dots, F_N$ uzavř. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} F_n$ uzavř.

<u>Dk.</u> plyne z Věty 13.1.

(pomocí doplňků)

1. ϕ, X uzavř. $\Leftrightarrow \phi^c, X^c$ otevřené

leč. $\left.\begin{array}{l}\phi^c = X \\ X^c = \phi\end{array}\right\}$ otevřené dle Věty 13.1. (část 1)

2. chceme: $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ uzavřené

$\Leftrightarrow \left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c$ otevřené

de Morgan: $\quad ||$

$$\underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{(F_\alpha)^c}_{\substack{\text{otevřené} \\ (\Leftarrow F_\alpha \text{ uzavřené})}}}_{\substack{\text{otevřené dle Věty 13.1.} \\ (\text{část 2})}}$$

3. chceme: $\bigcup_{n=1}^N F_n$ uzavřené

$\Leftrightarrow \left(\bigcup_{n=1}^N F_n\right)^c$ otevřené de Morgan: $= \bigcap_{n=1}^{N} \underbrace{\underbrace{(F_n)^c}_{\text{otevřené } (\Leftarrow F_n \text{ uzavř.})}}_{\text{otevřená dle V. 13.1., část 3}}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

<u>Věta 13.2</u> nechť (X, ρ) je m. p., nechť $F \subset X$. Potom je ekvivalentní:

(1) F je uzavřené

(2) $x_n \in F$ pro $\forall n$, $x_n \to x_0 \Rightarrow x_0 \in F$

<u>Dk.</u> dvojitě nepřímý...

<u>$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$</u> nechť F není uzavřené

tedy F^c není otevřené

... $\exists x_0 \in F^c \; \forall \delta > 0 : \mathcal{U}(x_0, \delta) \not\subset F^c$

neboli: $\mathcal{U}(x_0, \delta) \cap F \neq \emptyset$

$x_0 \in F^c$ fixuji, sloupec užívám pro

$$\delta = \frac{1}{n}, \; n = 1, 2, \dots$$

$$\dots \exists x_n \in F \; \& \; \rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$$

zřejmě $x_n \to x_0$ ... (2) neplatí.

$\underline{\neg(2) \Rightarrow \neg(1)}$ nechť neplatí (2), tj:

$\exists x_n \in F$ t.ž. $x_n \to x_0$, leč $x_0 \in F^c$.

?? nechť (1) platí, tj. F je uzavřené

$\Rightarrow F^c$ je otevřené, tedy

$$\exists \delta > 0 \text{ t.ž. } U(x_0, \delta) \subset F^c$$

neboli $U(x_0, \delta) \cap F = \emptyset$

avšak: $x_n \to x_0$, a tedy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

t.ž. $x_n \in U(x_0, \delta)$, $\forall n \geq n_0$

<u>SPOR</u> (neboť $x_n \in F, \forall n$)

Věta 13.3. Buď (X,ρ) m. p., $A, B \subset X$.

Potom: 1. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$

2. $\overline{A}$ je uzavřené

3. $A \subset \overline{A}$; přičemž $A = \overline{A}$ právě když A je uzavřené

4. $y \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists x_n \in A$ t. ž. $x_n \to y$.

Dk. 1. nechť $A \subset B$, nechť $y \in \overline{A}$,

tj. $U(y,\delta) \cap A \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$

ale tím spíše také platí

$U(y,\delta) \cap B \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$

tj. $y \in \overline{B}$

$y \in \overline{\emptyset} \Rightarrow \underbrace{U(y,\delta) \cap \emptyset}_{\text{musí prázdné ... SPOR}} \neq \emptyset$ pro $\forall \delta > 0$

2. chceme: $(\overline{A})^c$ otevřené, tj:

$\forall x_0 \in (\overline{A})^c \ \exists \delta > 0$ t.ž. $U(x_0,\delta) \subset (\overline{A})^c$

řečeno jinak, lépe:

$\forall x_0 \notin \overline{A} \ \exists \delta > 0$ t.ž. $U(x_0,\delta) \cap \overline{A} = \emptyset$

nechť $x_0 \notin \overline{A}$ ... tj: $\exists \delta > 0$ t.ž.

$$U(x_0,\delta) \cap A = \emptyset .$$

uvidíme, že dokonce $U(x_0,\delta) \cap \overline{A} = \emptyset$

(a tedy jsem hotov)

?? $\exists y \in U(x_0,\delta) \cap \overline{A}$

platí $\rho(x_0,y) < \delta$,

volme $\eta > 0$ t.ž. $\rho(x_0,y) + \eta < \delta$

uvidíme: $U(y,\eta) \subset U(x_0,\delta)$

dk. buď $z \in U(y,\eta)$, tj: $\rho(y,z) < \eta$

... Δ-nerovnost dává:

$\rho(x_0, z) \leq \rho(x_0, y) + \underbrace{\rho(y, z)}_{<\eta} < \delta$

tedy $z \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$

CELKEM: $\mathcal{U}(y, \eta) \cap A = \emptyset$, tedy

$y \notin \overline{A}$ ... SPOR.

3. několik kroků:

(i) $A \subset \overline{A}$: $y \in \mathcal{U}(y, \delta)$ vždy, a tedy:

$y \in A \Rightarrow y \cap \mathcal{U}(y, \delta) \neq \emptyset \ \forall \delta$

$\Rightarrow y \in \overline{A}$

(ii) $A = \overline{A} \Rightarrow A$ uzavřené

... dle bodu 2. výše

(iii) A uzavř. $\Rightarrow A = \overline{A}$

obrácem: $\neg (A = \overline{A}) \Rightarrow A$ není uzavř.

nechť $A \neq \overline{A}$, tj. nutně (viz bod (i))

$A \subsetneq \overline{A}$, neboli $\exists x_0$ t.ž.

$x_0 \in \overline{A}$ & $x_0 \notin A$, tj. $x_0 \in A^c$

$x_0 \in \overline{A} \Rightarrow \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap A \neq \phi \ \forall \delta > 0$

nebolí: $\mathcal{U}(x_0, \delta) \not\subset A^c$ pro

žádné $\delta > 0$

$\Rightarrow A^c$ není otevřené,

tj. A není uzavřené...

4. .. dvě implikace:

„$\Rightarrow$": nechť $y \in \overline{A}$, tj.

$\forall \delta > 0 \quad \mathcal{U}(y, \delta) \cap A \neq \phi$

užiji pro $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$\dots \exists x_n \in \mathcal{U}(y, \frac{1}{n}) \cap A$

zřejmě $x_n \to y$ & $x_n \in A$.

„$\Leftarrow$": nechť $x_n \in A$, $x_n \to y$.

se tyto stane $x_n \in \overline{A}$ (viz bod 3.)

ovšem $\overline{A}$ je uzavřené (bod 2.)

.. Věta 13.2. $\Rightarrow y \in \overline{A}$

(pro $F = \overline{A}$)