Věta 10.15. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně, kde $a_k \in \mathbb{R}$. Nechť $S \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak $\exists$ přerovnání takové, že $S = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Dk. 1. Tvrdím, že: $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+}_{s^+} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-}_{s^-} = +\infty$.

Platí: $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$, $a_k = a_k^+ - a_k^-$ a tedy (Věta 10.2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = s^+ + s^-, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s^+ - s^-$$

(má-li P.S. smysl)

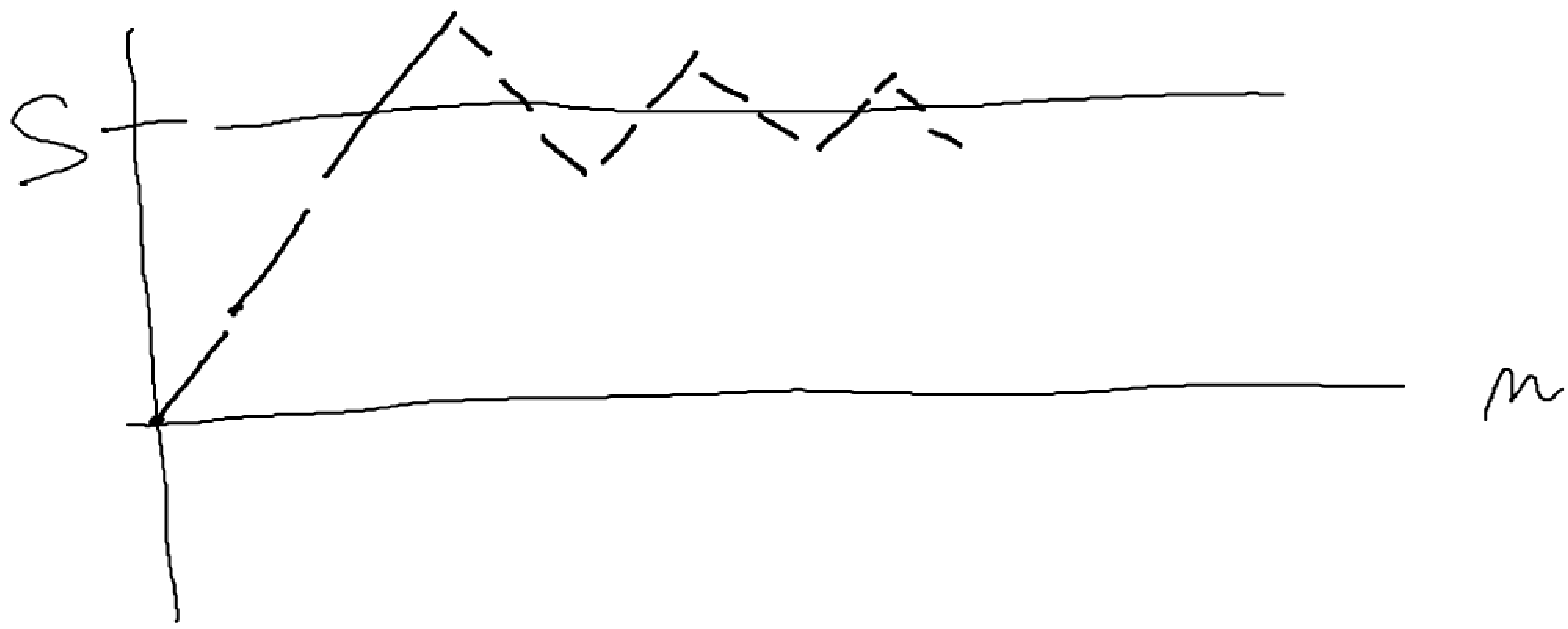
- $s^+ < +\infty$, $s^- < +\infty \Rightarrow \sum |a_k| < +\infty$
- $s^+ < +\infty$, $s^- = +\infty \Rightarrow \sum a_k = -\infty$
- $s^+ = +\infty$, $s^- < +\infty \Rightarrow \sum a_k = +\infty$

spor

nutně vždy: $s^+ = s^- = +\infty$

2. konstrukce přerovnání:

(i) beru kladné, až s_n přeleze S
(ii) beru záporné, až s_n podleze S



funguje, neboť:

- vždy přeleze ($s^+ = +\infty$, $s^- = -\infty$)
- čím dál menší kroky:
  ($a_k \to 0$, díky větě 10.1.)

3. může být $S = +\infty$ nebo $-\infty$,

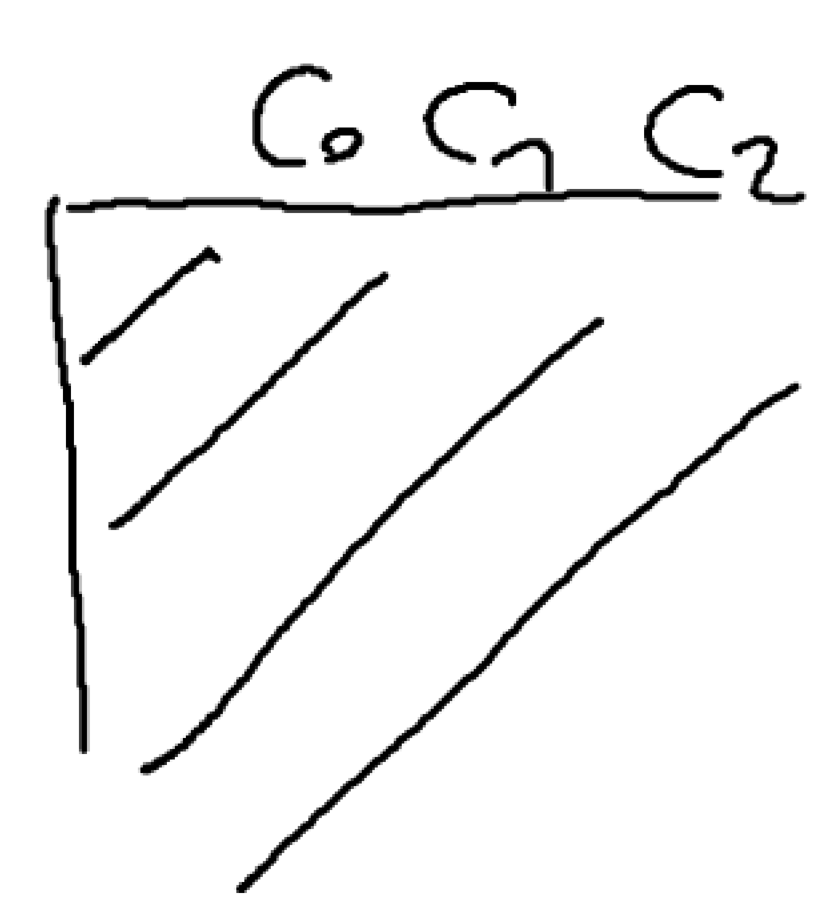
nebo $\{s_n\}$ nemá limitu

Věta 10.17. [Cauchyův součin řad].

Nechť $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konv. abs. Označme
$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$
pro $n = 0, 1, \dots$ Potom
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right).$$

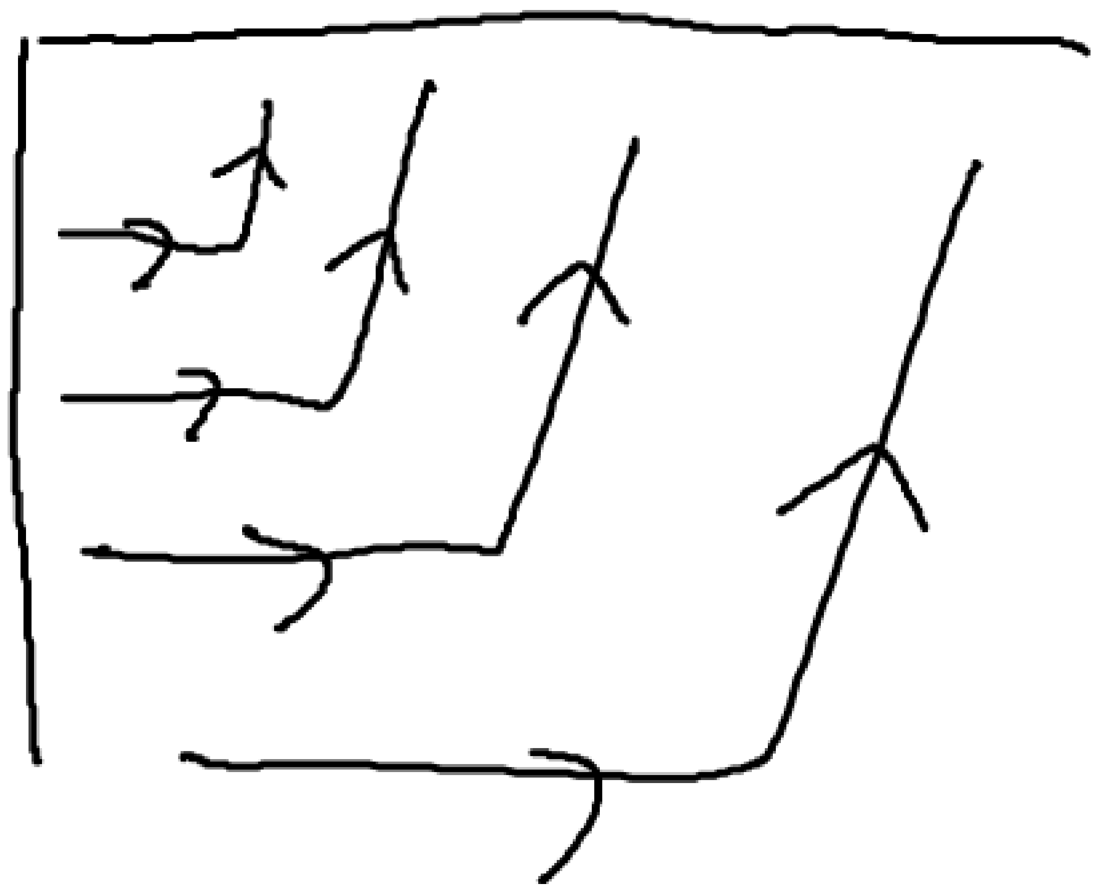
Dk. 1. formálně:
$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots)$$
$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_1 b_0 + b_1 a_0}_{c_1} + \underbrace{a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2}_{c_2}$$

$$\begin{array}{|cccc}
\hline
a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \dots \\
a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots \\
a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$



2. pomocná řada: $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$, kde:

d_k: $a_0 b_0,\ a_1 b_0,\ a_1 b_1,\ a_0 b_1,\ a_2 b_0, \dots$



ukážeme: $\sum d_k$ konv. absolutně

dk.:

$$\sum_{k=1}^{n^2} d_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |a_i||b_j|$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} |b_j| \right)$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right)$$

$$= C < +\infty$$

$\Rightarrow \sum |d_k|$ má omezené částečné součty

a tedy konverguje (L. 10.2)

$\Rightarrow \sum d_k$ konv. abs.

---

3. chceme: $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} d_k}_{\sigma} = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)}_{s} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)}_{t}$

buď: $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \,, \quad t_n = \sum_{j=0}^{n} b_j$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$$

zřejmě (viz krok 2):

$$\left. \sigma_{n^2} = s_{n-1} \cdot t_{n-1} \right| n \to \infty$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma & = & s & \cdot & t \end{array}$$

4. další pomocná řada $\sum_{k=1}^{n} e_k$

e_k: $a_0b_0,\ a_1b_0,\ a_0b_1,\ a_2b_0,\ a_1b_1,\ \dots$

přerovnání d_k !!

dle Věty 10.14: $$\sum_{k=1}^{\infty} e_k = \sigma \left(= \sum_{k=1}^{\infty} d_k \right)$$

zároveň ale: $$\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} e_k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

$n \to \infty$: $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} d_k$$

$\Rightarrow$ jsem hotov (viz bod 3.)