Nechť (X, ρ) je metrický prostor.

Příklad 1.1 Je-li X spočetný, pak $\dim X = 0$.

Příklad 1.2 Dokažte Lemma 1.1: $\dim X \leq n$ právě když pro každé $x \in X$ a uzavřenou $B \not\ni x$ existuje L, roztínající X mezi $\{x\}$ a B taková, že $\dim L \leq n-1$.

Příklad 1.3 Definujme vzdálenost bodu x od množiny B jako

$$\operatorname{dist}(x, B) := \inf_{z \in B} \rho(x, z)$$

Dokažte:

i) funkce $x \to \operatorname{dist}(x, B)$ je 1-lipschitzovská

ii) je-li B uzavřená, pak $\operatorname{dist}(x, B) = 0$ právě když $x \in B$.

iii) jsou-li A, B disjunktní, uzavřené, pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$ taková, že $f = 0$ na A, $f = 1$ na B a $f \in (0, 1)$ na $X \setminus (A \cup B)$

iv) jsou-li A, B disjunktní, uzavřené, pak existují disjunktní, otevřené G, H tak, že $A \subset G$, $B \subset H$

v) každá $G \subset X$ otevřená je typu F_σ, tj. lze ji napsat jako spočetné sjednocení uzavřených množin

Nápomoc:

1.1 uvažte, že $\partial U(x,\delta) = \{y \in X; \rho(x,y) = \delta\}$ je neprázdná nejvýše pro spočetně mnoho $\delta > 0$

1.2 vztah mezi L a ∂U v definici dimenze

1.3
- i) $\operatorname{dist}(x,B) \leq \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$, infimum přes $z \in B$; symetricky druhou nerovnost
- iii) kombinace funkcí $f_1(x) = \operatorname{dist}(x,A)$ a $f_2(x) = \operatorname{dist}(x,B)$
- iv) vzory vhodných otevřených intervalů funkce $f(x)$ z předchozího bodu
- v) uvažte, že $G = \{x \in X;\ \operatorname{dist}(x,B) > 0\}$, kde $B = X \setminus G$ je uzavřená