Lemma. [Klíčový krok Věty 1.7] Nechť $\mathcal{H}^{p+1}(X) = 0$. Potom pro s.v. $r \in (0, \infty)$ je $\mathcal{H}^p(X \cap S(r)) = 0$, kde $S(r) = S(x_0, r) = \{x \in X;\ \rho(x_0, x) = r\}$, $x_0 \in X$ pevný libovolný bod.

Důkaz. Nejprve odvodíme „fubiniovský" odhad pro průměr. Pro $E \subset X$ označme

$$r_1 = \inf_{x \in E} \rho(x_0, x) \qquad r_1 = \sup_{x \in E} \rho(x_0, x) \tag{1}$$

Zřejmě $\operatorname{diam} E \leq r_2 - r_1$ a tedy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \operatorname{diam}^p(E \cap S(r))\, dr &= \int_{r_1}^{r_2} \operatorname{diam}^p(E \cap S(r))\, dr \\ &\leq \operatorname{diam}^p(E) \int_{r_1}^{r_2} dr \leq \operatorname{diam}^{p+1}(E) \end{aligned} \tag{2}$$

Druhou část úvahy začneme pozorováním: $\mathcal{H}^d(A) = 0$, právě když pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje prokrytí $\{U_i\}$ množiny A takové, že $\sum_i \operatorname{diam}^d(U_i) < \epsilon$.
Tedy dle předpokladu lemmatu existuje posloupnost pokrytí[1] $\{U_i^n\}$ množiny X taková, že

$$\sum_i \operatorname{diam}^{p+1}(U_i^n) \to 0, \qquad n \to \infty$$

Aplikujeme-li (2) na $E = U_i^n$, je dále

$$\sum_i \int_0^\infty \operatorname{diam}^p(U_i^n \cap S(r))\, dr \to 0, \qquad n \to \infty \tag{3}$$

Díky Leviho větě zaměníme sumu přes i a integrál, tedy

$$\int_0^\infty \sum_i \operatorname{diam}^p(U_i^n \cap S(r))\, dr \to 0, \qquad n \to \infty \tag{4}$$

Označme dále $f(n, r) = \sum_i \operatorname{diam}^p(U_i^n \cap S(r))$. Podle Fatouova lemmatu existuje pro s.v. $r > 0$ podposloupnost (značená stejně) tak, že $f(n, r) \to 0$. Pro každé takové $r > 0$ je pak

$$\sum_i \operatorname{diam}^p(\tilde{U}_i^n) \to 0, \qquad n \to \infty \tag{5}$$

kde $\tilde{U}_i^n = U_i^n \cap S(r)$ pokrývají $S(r)$. Podle výše uvedeného pozorování máme $\mathcal{H}^p(S(r)) = 0$ a důkaz je hotov.

[1] i indexuje pokrývající množiny, n indexuje jednotlivá pokrytí.