Konstrukce inerciální variety optimální dimenze.

Poznámka. Zjednodušeno dle článku A.V. Romanov: "Sharp estimates of the dimension of inertial manifolds ...", Russian Acad. Sci. Izv. Math., vol. 43 (1994), no. 1.

Studujeme rovnici

$$\frac{d}{dt}u + Au + F(u) = 0 \tag{1}$$

Operátor A má posloupnost vlastních vektorů u_k a vlastních čísel λ_k, přičemž předpokládáme, že λ_k je nerostoucí s limitou $\lambda_k \to \infty$ pro $k \to \infty$ a vektory u_k tvoří bázi Hilbertova prostoru H^0. Od nelinearity $F(\cdot)$ požadujeme *globální* lipschitzovskost

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^0} \le L\|u - v\|_{H^0} \tag{2}$$

Za uvedených předpokladů lze dokázat, že pro každé $u_0 \in H^0$ existuje jediné $u(t) : [0, \infty) \to H^0$ (klasické) řešení rovnice s počáteční podmínkou $u(0) = u_0$. Příslušné řešicí operátory $S(t) : H^0 \to H^0$ definujeme jako obvykle vztahem $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$. Budeme také předpokládat $F(0) = 0$, tj. $u = 0$ je řešení.
Chceme dokázat existenci *inerciální variety*, což je konečně-dimenzionální lipschitzovská varieta v H^0, která je (úplně) invariantní, a přitom obsahuje vlastně všechna řešení (1) modulo exponenciálně malá porucha pro $t \to \infty$.
V následujícím jsou P_k respektive Q_k projekce na podprostor generovaný $u_1, \dots, u_k$ respektive $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots$, tj. P_k je k-dimenzionální. Normu v H^0 značíme pro jednoduchost $\|\cdot\|$.

Definice. Množinu $\mathcal{M} \subset H^0$ nazveme *inerciální varietou* třídy (k, ξ, γ), jestliže $\mathcal{M} = \operatorname{graf} \sigma$, kde $\sigma : P_k \to Q_k$ je ξ-lipschitzovská funkce, a platí

- pro $\forall u_0 \in \mathcal{M}$ existuje $u(t) : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ řešení (1) splňující $u(0) = u_0$
- pro každé $u_0 \in H^0$ existuje $\tilde{u}_0 \in \mathcal{M}$ takové, že

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\| \le c_0\|Q_k u_0 - \sigma(P_k u_0)\| \tag{3}$$

  a příslušná řešení $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ splňují

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \le c_1\|u_0 - \tilde{u}_0\|e^{-\gamma t}, \qquad \forall t \ge 1 \tag{4}$$

Věta 4.1. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $h \in (0, 1)$ splňují

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k > (1 + \omega(h))L, \quad \lambda_{k+1} > L \tag{SGC}$$

kde $\omega(h) = (h^2 + h^{-2})/2$. Potom existuje inerciální varieta ve třídě (k, h, γ), kde $\gamma = \lambda_{k+1} - L$.

Poznámky. Klíčová podmínka (SGC) ("spectral gap condition" neboli „podmínka díry ve spektru“) požaduje, aby mezera mezi λ_k a λ_{k+1} byla dost velká (vzhledem k lipschitzovské konstantě nelinearity L). Protože funkce $\omega(h)$ má minimum $\omega(1) = 1$, lze jí vyhovět, právě když $\lambda_{k+1} - \lambda_k > 2L$. Lze také ukázat, že konstanta dva je zde nejlepší možná.

Definice. Definujme pro dané $k \in \mathbb{N}$ a $\xi > 0$ výraz $V_\xi(u) = \|y\|^2 - \xi^2\|x\|^2$, kde $u = P_k u + Q_k u = x + y$. Dále definujeme „kladný a záporný kužel“

$$\mathcal{V}_\xi^+ = \{u \in H^0;\ V_\xi(u) \ge 0\} \tag{5}$$

$$\mathcal{V}_\xi^- = \{u \in H^0;\ V_\xi(u) \le 0\} \tag{6}$$

Řekneme, že (1) splňuje podmínku (ξ, γ)-kuželu, jestliže pro libovolná dvě řešení $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ platí

$$V_\xi(u(t) - \tilde{u}(t)) \leq V_\xi(u_0 - \tilde{u}_0)e^{-2\gamma t}, \quad \forall t \geq 0 \tag{$\xi\gamma$-K}$$

Poznámka. Z našeho hlediska je $\mathcal{V}_\xi^-$ „dobrá množina“, protože y (a tedy celá norma) je kontrolována konečně-dimenzionální složkou x. Podmínka ($\xi\gamma$-K) implikuje klíčovou vlastnost: $\mathcal{V}_\xi^-$ je dopředně invariantní, ekvivalentně $\mathcal{V}_\xi^+$ je zpětně invariantní pro rozdíly řešení. Podrobněji: jsou-li $u(t)$ a $\tilde{u}(t)$ řešení a platí $u(t) - \tilde{u}(t) \in \mathcal{V}_\xi^-$ pro nějaké t_0, pak totéž platí i pro všechna $t \geq t_0$. Naopak, je-li $u(t) - \tilde{u}(t) \in \mathcal{V}_\xi^+$ pro nějaké t_1, pak totéž platí i pro všechna $t \leq t_1$. Poznamenejme, že díky možné volbě $\tilde{u} \equiv 0$ dostáváme analogickou invarianci i pro jednotlivé řešení $u(t)$.

Ve zbývajícím textu již v podstatě probíhá důkaz Věty 4.1, tj. konstrukce inerciální variety $\mathcal{M}$. Předpokládáme tedy, že $k \in \mathbb{N}$ a $h \in (0, 1)$, pro něž platí klíčová podmínka (SGC), jsou fixována, a budeme psát jednoduše P a Q místo P_k a Q_k. Označíme $X = PH^0$ (rovná se $\mathbb{R}^k$) a $Y = QH^0$. Opakovaně budeme pracovat s rozkladem $u = Pu + Qu = x + y$.

Lemma 4.1. [Romanov, Lemma 4.] Nechť platí (SGC). Potom platí ($\xi\gamma$-K) pro každé $\xi \in [h, h^{-1}]$ a $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$, kde $\gamma_0 = \lambda_k + \omega(h)L$, $\gamma_1 = \lambda_{k+1} - L$.
Důkaz. Ukážeme, že pro libovolná řešení $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ a konstanty ξ, γ v uvedených mezích platí

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{2\gamma t} V_\xi(u(t) - \tilde{u}(t))\right\} \leq 0\,; \tag{7}$$

odsud zřejmě plyne ($\xi\gamma$-K). Označme $u(t) = Pu(t) = Qu(t) = x(t) + y(t)$, analogicky rozložíme $\tilde{u}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{y}(t)$. Nejprve si vypočítáme $\frac{d}{dt}\|x(t) - \tilde{x}(t)\|^2$ a $\frac{d}{dt}\|y(t) - \tilde{y}(t)\|^2$. Odečteme rovnice pro u a $\tilde{u}$ a na výsledek aplikujeme operátor P, který lze zaměnit s $\frac{d}{dt}$ i A a tudíž máme

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \tilde{x}(t)) = -A(x(t) - \tilde{x}(t)) - P\big[F(u(t) - F(\tilde{u}(t))\big]$$

Skalárně násobíme s $2(x(t) - \tilde{x}(t))$ a počítáme (pro jednoduchost již bez argumentu t)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|x - \tilde{x}\|^2 &= -\langle A(x - \tilde{x}), x - \tilde{x}\rangle - \langle P[F(u) - F(\tilde{u})], x - \tilde{x}\rangle \\ &\geq -\lambda_k\|x - \tilde{x}\|^2 - \langle [F(u) - F(\tilde{u})], x - \tilde{x}\rangle\end{aligned} \tag{8}$$

Užili jsme spektrální odhad $\langle Ax, x\rangle \leq \lambda_k\|x\|^2$ pro $x \in X$ a ve druhém členu samoadjungovanost P. Zcela analogicky pomocí odhadu $\langle Ay, y\rangle \geq \lambda_{k+1}\|y\|^2$ dostaneme

$$\frac{d}{dt}\|y - \tilde{y}\|^2 \leq -\lambda_{k+1}\|y - \tilde{y}\|^2 - \langle [F(u) - F(\tilde{u})], y - \tilde{y}\rangle \tag{9}$$

Nyní už můžeme vyčíslit levou stranu (7), kterou ihned násobíme (kladným) faktorem $e^{-2\gamma t}$:

$$\begin{aligned}2\gamma V_\xi(u - \tilde{u}) + \frac{d}{dt}V_\xi(u - \tilde{u}) &= 2\gamma\big(\|y - \tilde{y}\|^2 - \xi^2\|x - \tilde{x}\|^2\big) + \frac{d}{dt}\|y - \tilde{y}\|^2 - \xi^2\frac{d}{dt}\|x - \tilde{x}\|^2 \\ &\leq 2(\gamma - \lambda_{k+1})\|y - \tilde{u}\|^2 + 2\xi^2(\lambda_k - \gamma)\|x - \tilde{x}\|^2 - 2\mathcal{J}\end{aligned} \tag{10}$$

kde

$$\mathcal{J} = \langle [F(u) - F(\tilde{u})], (y - \tilde{y}) - \xi^2(x - \tilde{x})\rangle \tag{11}$$

Díky (2) je

$$\|F(u) - F(\tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\| = L\|(y - \tilde{y}) + (x - \tilde{x})\|$$

a tedy, díky Cauchy-Schwartzově nerovnosti,

$$|\mathcal{J}| \leq L\|(y - \tilde{y}) + (x - \tilde{x})\|\|(y - \tilde{y}) - \xi^2(x - \tilde{x})\|$$

Zřejmě platí odhad $|\mathcal{J}| \leq c_\xi L$, my se však ještě trochu zdržíme určením optimální hodnoty konstanty c_ξ. Díky ortogonalitě x a y plyne z Pythagorovy věty

$$|\mathcal{J}|^2 \leq L^2(a + b)(a + \xi^4 b)$$

kde $a = \|y - \tilde{y}\|^2$, $b = \|x - \tilde{x}\|^2$; nyní použijeme elementární nerovnost[1]

$$(a + b)^{1/2}(a + cb)^{1/2} \leq a + \left(\frac{1 + c}{2}\right) b \qquad \forall a, b, c \geq 0.$$

Odsud je

$$|\mathcal{J}| \leq L\|y - \tilde{y}\|^2 + L\left(\frac{1 + \xi^4}{2}\right)\|x - \tilde{x}\|^2$$

a tedy odhad (10) lze pokračovat

$$\leq 2(\gamma - \lambda_{k+1} + L)\|y - \tilde{y}\|^2 + 2\xi^2(\lambda_k - \gamma + L\omega(\xi))\|x - \tilde{x}\|^2 \tag{12}$$

Díky podmínce $\gamma \leq \gamma_1 = \lambda_{k+1} - L$ je nekladný první člen. Díky podmínce $\gamma \geq \gamma_0 = \lambda_k + \omega(h)L$ a odhadu $\omega(\xi) \leq \omega(h)$ pro $\xi \in [h, h^{-1}]$ je nekladný i druhý člen. □

Lemma 4.2. [Romanov, Lemma 5.] Nechť u_1, u_2, $u_3 \in H^0$. Pišme $u_i = Pu_i + Qu_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, 3$. Nechť $x_1 = x_2$, $u_1 - u_3 \in \mathcal{V}_\eta^+$, $u_2 - u_3 \in \mathcal{V}_\xi^-$, kde $\xi \in (0, 1)$ a $\eta = \xi^{-1}$. Potom $\|y_1 - y_3\| \leq K_\xi\|y_1 - y_2\|$.
Důkaz. Z předpokladu $u_2 - u_3 \in \mathcal{V}_\xi^-$ respektive $u_1 - u_3 \in \mathcal{V}_\eta^+$ máme

$$\|y_2 - y_3\| \leq \xi\|x_2 - x_3\| \tag{13}$$

$$\eta\|x_1 - x^3\| \leq \|y_1 - y_3\| \tag{14}$$

Aplikujeme postupně trojúhelníkovou nerovnost, (13), rovnost $x_2 = x_1$ a konečně (14)

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_3\| &\leq \|y_1 - y_2\| + \|y_2 - y_3\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \xi\|x_2 - x_3\| \\ &= \|y_1 - y_2\| + \xi\|x_1 - x_3\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \xi\eta^{-1}\|y_1 - y_3\| \end{aligned}$$

Ovšem $\eta^{-1} = \xi$ a závěr plyne s konstantou $K_\xi = (1 - \xi^2)^{-1}$. □

Komentář. Předchozí lemma je geometricky dost názorné: body u_1 a u_2 leží nad sebou, body u_2 a u_3 jsou sevřeny úzkým záporným kuželem $\mathcal{V}_\xi^-$, tj. leží „vedle sebe"; body u_1 a u_3 jsou naopak vzájemně v úzkém kladném kuželu $\mathcal{V}_\eta^+$, tj. leží „nad sebou". Pochopitelný závěr je, že vertikální vzdálenost u_1 a u_3 je odhadnutelná vertikální vzdáleností u_1 a u_2.

[1]BÚNO $a + b = 1$, hledejme maximum levé strany při $a = t$, $b = 1 - t$ pro $t \in [0, 1]$.

Též následující lemma je velmi názorné: uvážíme-li, že $V_\xi(u)$ je úměrné vzdálenosti bodu u od záporného kuželu $\mathcal{V}_\xi^-$, pak tvrdíme, že bod nacházející se mimo širší záporný kužel $\mathcal{V}_\eta^-$ se může přiblížit k užšímu zápornému kuželu $\mathcal{V}_\xi^-$ pouze tak, že se přiblíží k počátku.

Lemma 4.3. [Romanov, Lemma 6.] Nechť $0 < \xi < \eta$ a $u \in \mathcal{V}_\eta^+$. Potom $\|u\|^2 \le M_{\xi,\eta} V_\xi(u)$.
Důkaz. Předpoklad $u \in \mathcal{V}_\eta^+$ implikuje $\|x\|^2 \le \eta^{-2}\|y\|^2$. Nyní odhadujeme

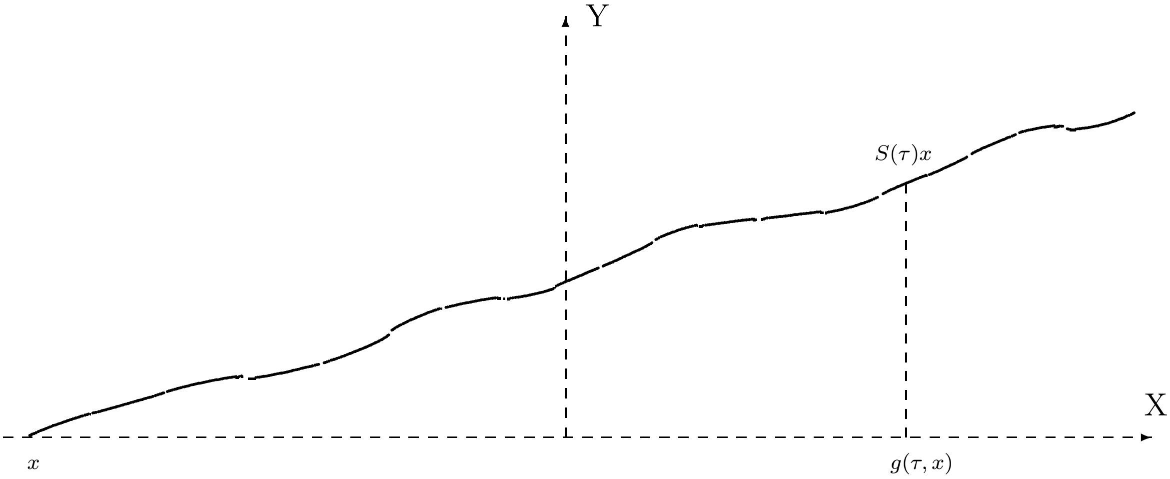
$$\|u\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \le (1 + \eta^{-2})\|y\|^2$$

a za druhé

$$(\eta^2 - \xi^2)\|y\|^2 = \eta^2\|y\|^2 - \xi^2\|y\|^2 \le \eta^2\|y\|^2 - \xi^2\eta^2\|x\|^2 = \eta^2 V_\xi(u)$$

Kombinací těchto nerovností plyne závěr s konstantou $M_{\xi,\eta} = \frac{1+\eta^2}{\eta^2-\xi^2}$. □

Definice. Definujme pro $\tau \ge 0$ a $x \in X$ zobrazení $g(\tau, x) = PS(\tau)x$.



Komentář. Uvedená definice je naivní projekcí dynamiky z H^0 do X; dle následujícího lemmatu však dostáváme prostý a dokonce invertovatelný (tj. definovaný i pro $t < 0$) dynamický systém.

Lemma 4.4. [Romanov, Lemma 7.] Pro každé $\tau \ge 0$ pevné je $g(\tau, \cdot)$ vzájemně jednoznačné (dokonce bi-lipschitzovské) zobrazení X na X.
Důkaz. Fixujme $\tau > 0$ a $x, \tilde{x} \in X$. Označme $u(t) = S(t)x$ a $\tilde{u}(t) = S(t)\tilde{x}$. Z podmínky ($\xi\gamma$-K), kde si můžeme posloužit libovolným $\xi \in [h, h^{-1}]$ a $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ dle Lemmatu 4.1, máme

$$\|y(\tau) - \tilde{y}(\tau)\|^2 - \xi^2\|x(\tau) - \tilde{x}(\tau)\|^2 \le -\xi^2\|x - \tilde{x}\|^2 e^{-2\gamma\tau}$$
$$\|x - \tilde{x}\|^2 \le e^{2\gamma\tau}\|x(\tau) - \tilde{x}(\tau)\|^2$$

a poslední nerovnost říká, že

$$\|g(\tau, x) - g(\tau, \tilde{x})\| \ge e^{-\gamma\tau}\|x - \tilde{x}\| \tag{15}$$

Tedy zobrazení $g(\tau, \cdot)$ je prosté, a protože je zřejmě i spojité, z Brouwerovy věty o invarianci vyplývá, že množina $X_\tau = g(\tau, X)$ je otevřená.
Za druhé je snadné si rozmyslet, že X_τ je uzavřená: pokud $y_j \in X_\tau$ konvergují k bodu $y_0 \in X$, je příslušná množina vzorů x_j dle (15) cauchyovská a její limita je zjevně vzorem bodu y_0. Tedy X_τ je obojetná, neprázdná množina, tedy nutně rovná celému X. □

Definice. Pro $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$ označme

$$\chi(t,x) := \lim_{\tau\to\infty} S(t+\tau)z(\tau,x) \tag{16}$$

kde $z(\tau,\cdot) = [g(\tau,\cdot)]_{-1}$.

Komentář. Výraz $z(\tau,x)$ je definován díky předchozímu lemmatu, operátor $S(t+\tau)$ je definován pokud $\tau+t \geq 0$, tedy pro τ dost velká. Existenci limity však bude nutno dokázat a je to v podstatě nejtěžší technický krok v konstrukci inerciální variety.

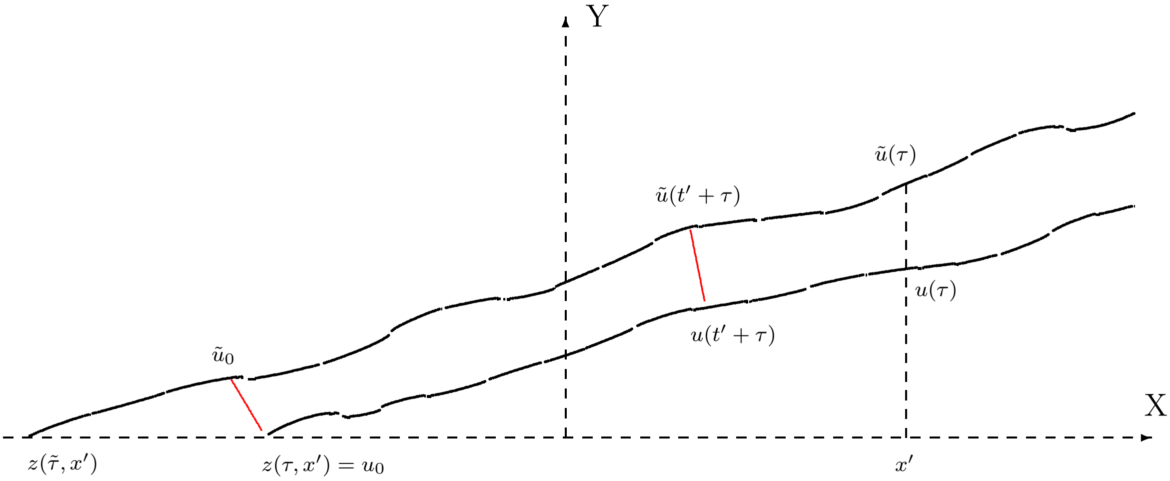
Lemma 4.5. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $x \in X$ je funkce $\chi(t,x)$ dobře definována.
Důkaz. Rozmysleme si nejprve, že je-li definováno $\chi(t,x)$, je definováno i $\chi(\tilde t,x)$ pro každé $\tilde t > t$ a platí $\chi(\tilde t,x) = S(\tilde t - t)\chi(t,x)$; lze totiž psát

$$\lim_{\tau\to\infty} S(\tilde t+\tau)z(\tau,x) = \lim_{\tau\to\infty} S(\tilde t-t)S(t+\tau)z(\tau,x) = S(\tilde t-t)\lim_{\tau\to\infty} S(t+\tau)z(\tau,x)$$

díky spojitosti a semigrupové vlastnosti $S(t)$. Fixujme $x' \in X$ a $t' \in \mathbb{R}$; dle předchozího lze búno předpokládat, že $t' \leq 0$. Existenci limity $\chi(t',x')$ ověříme přes b.c. podmínku

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists T>0\big)\big(\forall\tau,\tilde\tau\big)\big[\tilde\tau \geq \tau > T \implies \|S(t'+\tau)z(\tau,x') - S(t'+\tilde\tau)z(\tilde\tau,x')\| \leq \varepsilon\big] \tag{17}$$

Pro kladná $\tilde\tau > \tau$ taková, že $\tau + t' \geq 0$, definujeme (viz obrázek!) $u_0 = z(\tau,x')$ a $\tilde u_0 = S(\tilde\tau-\tau)z(\tilde\tau,x')$. Příslušná řešení označíme $u(t) = S(t)u_0$ a $\tilde u(t) = S(t)\tilde u_0$. Všimněme si, že $Pu(\tau) = P\tilde u(\tau) = x'$. Veličina odhadovaná v implikaci (17) je $\|u(t'+\tau) - \tilde u(t'+\tau)\|$.



Budeme potřebovat čtyři pomocné odhady: za prvé, z negativní invariance kladných kuželů a faktu, že $u(\tau)$ a $\tilde u(\tau)$ leží nad sebou, plyne, že $u(t) - \tilde u(t) \in \mathcal{V}_q^+$, $q = h^{-1}$ pro každé $t \in [0,\tau]$. Z lemmatu 4.3 (pro $\xi = 1$, $\eta = q$) speciálně máme

$$\|u(t'+\tau) - \tilde u(t'+\tau)\| \leq M_q V_1(u(t'+\tau) - \tilde u(t'+\tau)) \tag{18}$$

Za druhé, z podmínky ($\xi\gamma$-K) pro $\xi = 1$ a $\gamma = \gamma_1$ máme

$$V_1(u(t'+\tau) - \tilde u(t'+\tau)) \leq V_1(u_0 - \tilde u_0)e^{-2\gamma_1(t'+\tau)}$$

Avšak $V_1(u_0 - \tilde u_0) = \|y_0 - \tilde y_0\|^2 - \|x_0 - \tilde x_0\|^2 = \|\tilde y_0\|^2 - \|x_0 - \tilde x_0\|^2$, tedy celkem

$$V_1(u(t'+\tau) - \tilde u(t'+\tau)) \leq \big(\|\tilde y_0\|^2 - \|x_0 - \tilde x_0\|^2\big)e^{-2\gamma_1(t'+\tau)} \tag{19}$$

Za třetí, uvážíme-li, že $\tilde{u}_0 = S(\tilde{\tau} - \tau)z(\tilde{\tau}, x')$ a $z(\tilde{\tau}, x') \in X \subset \mathcal{V}_h^-$, je dle pozitivní invariance záporných kuželů též $\tilde{u}_0 \in \mathcal{V}_h^-$. Tedy

$$\|\tilde{y}_0\|^2 - \|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 \leq h^2\|\tilde{x}_0\|^2 - \|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 \leq K\|x_0\|^2 \tag{20}$$

pro nějaké vhodné $K = K_h$ dost velké. Za čtvrté, z podmínky ($\xi\gamma$-K) pro $\xi = 1$ a $\gamma = \gamma_0$ vyplývá (srovnej (15) výše)

$$\|x_0\|^2 \leq \|x'\|^2 e^{2\gamma_0\tau} \tag{21}$$

Zřetězením nerovností (18 – 21) dostaneme

$$\|u(t' + \tau) - \tilde{u}(t' + \tau)\| \leq Ce^{-2(\gamma_1 - \gamma_0)\tau} \tag{22}$$

kde $C = M_q K e^{-2\gamma_1 t'}\|x'\|^2$ je pevná konstanta. Je zřejmé, že pro $\tilde{\tau} > \tau \geq T$ dost velké je pravá strana libovolně malá a b.c. podmínka (17) je tím ověřena. □

Definice. Pro $x \in X$ označme $\psi(x) = \chi(0, x)$ a $\sigma(x) = Q\psi(x)$, patrně je $\psi(x) = x + \sigma(x)$. Ověříme, že $\mathcal{M} := \operatorname{graf} \sigma = \{\psi(x);\ x \in X\}$ je inerciální varieta ve smyslu Věty 4.1.
Zřejmě $x - \tilde{x} \in X \subset \mathcal{V}_h^-$ a užitím dopředné invariance a uzavřenosti záporných kuželů je též $\chi(0, x) - \chi(0, \tilde{x}) = \psi(x) - \psi(\tilde{x}) \in \mathcal{V}_h^-$, což po rozepsání říká, že funkce σ je h-lipschitzovská.

Lemma 4.6. Pro každé $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$ je $\chi(t, x) \in \mathcal{M}$.
Důkaz. Je dáno $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že $\chi(t, x) = \chi(0, \tilde{x})$, kde $\tilde{x} = P\chi(t, x)$. Lze psát

$$\begin{aligned}
\chi(t, x) - \chi(0, \tilde{x}) &= \lim_{\tau\to\infty} \big(S(t + \tau)z(\tau, x) - S(\tau)z(\tau, \tilde{x})\big) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \big(S(t + \tau)z(\tau, x) - S(t + \tau)z(t + \tau, x)\big)
\end{aligned}$$

Protože $z(\tau, x) - z(t+\tau, \tilde{x}) \in \mathcal{V}_h^-$, plyne z dopředné invariance a uzavřenosti záporných kuželů, že též $\chi(t, x) - \chi(0, \tilde{x}) \in \mathcal{V}_h^-$. Ovšem $\chi(t, x) - \chi(0, \tilde{x}) \in Y$, a zřejmě $\mathcal{V}_h^- \cap Y = \{0\}$. □

Důsledek. $\mathcal{M}$ je (úplně) invariantní vůči $S(t)$: nechť $u_0 \in \mathcal{M}$, tj. $u_0 = \chi(0, x_0)$ pro nějaké $x_0 \in X$. Pro $t > 0$ je $S(t)u_0 = \chi(t, x_0) \in \mathcal{M}$, viz začátek důkazu Lemmatu 4.5. Podobnou úvahou pak je $u_0 = S(t)u_{-1}$, kde $u_{-1} = \chi(-t, x_0) \in \mathcal{M}$.

Lemma 4.7. $\mathcal{M}$ má stopovací vlastnost, tj. vlastnosti (3) a (4) v definici inerciální variety.
Důkaz. Nechť $u(t) = S(t)u_0$ je libovolné řešení, $u(t) = Pu(t) + Qu(t) = x(t) + y(t)$. Fixujme $t_1 > 0$. Díky invarianci $\mathcal{M}$ existuje $\tilde{u}_{0t_1}$ takové, že $S(t_1)\tilde{u}_{0t_1} = \psi(x(t_1))$. Jinými slovy, řešení $\tilde{u}_1(t) = S(t)\tilde{u}_{0t_1}$ se v čase $t = t_1$ nachází v bodě $\mathcal{M}$ ležícím pod $u(t_1)$, tedy speciálně $u(t_1) - \tilde{u}_1(t_1) \in \mathcal{V}_q^+$, kde $q = h^{-1}$. Z negativní invariance kladných kuželů je též $u_0 - \tilde{u}_{0t_1} \in \mathcal{V}_q^+$.
Stejnou úvahu provádíme pro posloupnost $t_2,\ t_3, \dots t_n \to \infty$ a získáme počáteční podmínky $\tilde{u}_{0t_n} \in \mathcal{M}$ takové, že příslušná řešení $\tilde{u}_n(t) = S(t)\tilde{u}_{0t_n}$ leží na $\mathcal{M}$ a navíc $u(t) - \tilde{u}_n(t) \in \mathcal{V}_q^+$ pro každé $t \in [0, t_n]$. Protože se posloupnost $\tilde{u}_{0t_n}$ nachází na grafu konečně-dimenzionální variety $\mathcal{M}$ a je zároveň omezená kladným kuželem o pevném vrcholu u_0, lze z ní vybrat konvergentní podposloupnost $\tilde{u}_{0t_n} \to \tilde{u}_0$ a rutinním způsobem se ověří, že $\tilde{u}_n(t)$ jdou lokálně stejnoměrně k řešení $\tilde{u}(t) = S(t)\tilde{u}_0$, a platí $u(t) - \tilde{u}(t) \in \mathcal{V}_q^+$ pro každé $t \in [0, \infty)$.
Zbývá ověřit (3) a (4). Aplikací Lemmatu 4.2 pro $u_1 = u_0$, $u_2 = \psi(x_0)$ a $u_3 = \tilde{u}_0$ dostáváme

$$\|Qu_0 - Q\tilde{u}_0\| \leq K_h\|Qu_0 - \sigma(Pu_0)\|$$

Ovšem $u_0 - \tilde{u}_0 \in \mathcal{V}_q^+$, tedy

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|^2 = \|Pu_0 - P\tilde{u}_0\|^2 + \|Qu_0 - Q\tilde{u}_0\|^2 \leq (1 + h^2)\|Qu_0 - Q\tilde{u}_0\|^2$$

Kombinací těchto nerovností dostáváme (3) s $c_0 = (1 + h^2)^{1/2} K_h$. Exponenciální přitahování (4) plyne snadno z podmínky ($\xi\gamma$-K) pro $\xi = h$, $\gamma = \gamma_1$, odhadu

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|^2 \leq K_h V_h(u(t) - \tilde{u}(t))$$

dle Lemmatu 4.3 pro $\xi = h$ a $\eta = q = h^{-1}$ a konečně zřejmého odhadu

$$V_h(u_0 - \tilde{u}_0) \leq c_h \|u_0 - \tilde{u}_0\|^2$$