(1) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\sum_{i\leq j} x_i x_j\right)} dx$

(2) $\int_{\mathbb{R}^2} x^{100} y^{200} e^{-x^2-2xy-3y^2} dx\,dy$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 \, dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \mathrm{Re} \sqrt{\frac{\pi}{i}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(4) Objem koule v $\mathbb{R}^n$ < pomocí gaussova integrálu $\int e^{-\|x\|^2} dx$
pomocí sférických souřadnic

V jaké dimenzi by moře o hloubce 5 km zabíralo více než 90% objemu planety poloměru 10 000 km

(5) Míra $1+\mu+\frac{\mu\otimes\mu}{2!}+\frac{\mu\otimes\mu\otimes\mu}{3!}+\dots$

na prostoru $\mathbb{X}=\{\emptyset\}\cup\Omega\cup\Omega\times\Omega\cup\Omega\times\Omega\times\Omega\cup\dots$
kde μ je nějaká konečná kladná míra na Ω (třeba Lebesgueova na omezené podmnožině $\Omega\subset\mathbb{R}^d$) $d=1,2,3,\dots$
se nazývá "Poissonovým bodovým polem" na "konfiguračním prostoru" $\mathbb{X}$. Po normalizaci faktorem $e^{-\mu(\Omega)}$ jde o pravděpodobnost. Určete její obraz při zobrazení $\{(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)\mapsto n\}: \mathbb{X}\to\mathbb{N}$

(6) Nechť μ je pravděpodobnost na $\mathbb{R}$, $a=\int_{\mathbb{R}} x\,d\mu(x)$ její střední hodnota a $b^2=\int(x-a)^2 d\mu(x)$ její rozptyl. Pak obraz $\underbrace{\mu*\dots*\mu}_{N\text{ krát}}$ při zobrazení $\{x\to\frac{x}{N}\}$ konverguje k δ_a (takzvaný zákon velkých čísel) zatímco pro $a=0$ a $b=\frac{1}{2}$ konverguje obraz $\underbrace{\mu*\dots*\mu}_{N\text{ krát}}$ při zobrazení (jemnější "měřítko" než předtím!) $\{x\to\frac{x}{\sqrt{N}}\}$ ke Gaussově míře $\frac{d\mu_{gauss}(x)}{dx}=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$
Konvergencí měr zde rozumíme prostě bodovou konvergenci Fourierových obrazů

(7) Nechť $\mu = \sum_i \alpha_i \delta_{a_i}$ pak $\underbrace{\mu * \dots * \mu}_{N \text{ krát}} = \sum \dots$

rozviňte dle polynomické formule

speciálně $(\delta_{-1} + \delta_1)^N =$

(8) Vysvětlete, kde se vzaly konstanty $\sqrt{\pi}$ a $\frac{1}{12n}$ v Stirlingově vzorci

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right)$$

(9) Fourierova transformace intervalu $[i, i+1, i+2, \dots, j-1, j]$ $i, j \in \{0, 1, \dots n-1\}$ v diskrétní Fourierově transformaci

(10) Coulombův potenciál v $\mathbb{R}^3$ definujeme jako řešení rovnice $\Delta f = \delta_0$, $f \to 0$ když $|x| \to \infty$.

Ověřte, že jde o funkci $\frac{1}{r}$, $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

některou ze 4 metod:

a) Pomocí Gauss Greenovy věty použité na integrály typu $\int \Delta f \cdot \varphi$ přes doplněk malé koule se středem v 0

b) zhlazením $\frac{1}{r}$ v bodě 0 třeba paraboloidem

c) vyjádřením $\frac{1}{r}$ ve stylu Gamma funkce

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{t}} dt$$

d) přes následující úlohu

(11) Fourierova transformace $\frac{1}{r}$ v $\mathbb{R}^3$

(12) Vysvětlete, že Besselovy funkce vznikají (m.j.) jako vlastní hodnoty Laplaciánu v $\mathbb{R}^2$ tvaru

$$e^{ik\varphi} \cdot f(r)$$

(13) $$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x\varphi)\, d\varphi$$

(14) $$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$D_N(x) = \sum_{|k| \leq N} e^{ikx} = \frac{\sin (N+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$

(15) Vysvětlete, že konvoluce $f \to f * D_N$ přiřazuje 2π periodické funkci její F. řadu $\sum_{|m| \leq N} c_m e^{imx}$

(16) Dokažte Parsevalovu rovnost (pro Fourierovu transformaci) pro gaussovské funkce, spočtěte konvoluci dvou gaussovských funkcí (pomocí i bez pomoci F. transformace)

(17) $\dot{x} = Ax + v\delta_0 \quad x, v \in \mathbb{R}^n$

(18) $\ddot{x} = -a\dot{x} - bx + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$

(19) $C(K) \otimes C(K')$ husté v $C(K\times K')$ Kompakty

(20) $C^k(\mathbb{R}) \otimes C^k(\mathbb{R})$ husté v $C^k(\mathbb{R}^2)$

(21) Vedení tepla na úsečce s okrajovou podmínkou 0

(22) Vedení tepla na polopřímce s okrajovou podmínkou 0 v nekonečnu a libovolnou funkcí časem zleva (využití xe^{-x^2})

(23) "Houbka zamrzání vody při změněné rychlosti časem" anebo řešení rovnice vedení tepla na polopřímce separací proměnných (okraj nalevo je periodickou funkcí časem, třeba přímo $\sin\omega t$)

(24) chladnutí koule v homogenní kapalině

(25) Rovnice vedení tepla v dimenzi 0:

$\dot{y} = a(g-y)$ $\underline{a}$ veliké napsat řešení pro libovolné g, asymptotiku pro $a\to\infty$

(26) Původní Eulerova definice Γ funkce

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \overset{?}{=} \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$$

využijte vztah $\Gamma(z) = (z-1)\,\Gamma(z-1)$

(27) Spočtěte $\Gamma'(1)$ a $\Gamma'(n)/\Gamma(n)$

(28) napište explicitní formuli (jako konvoluci g s vhodným jádrem) pro řešení rovnice

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = g(x)$$

(29) $\text{v.p.}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x+i\varepsilon} + C\delta_0$ spočtěte C

(30) Hilbertova transformace $\{\varphi \mapsto \varphi * \text{v.p.}\,1/x\}$ je unitárním zobrazením

(31) Vysvětlete definici plošného integrálu jako limitu objemového integrálu přes "vrstvu" a vzorec pro plošný integrál přes sféru

(32) U vzorce pro fundamentální řešení vlnové rovnice (3 dim) vysvětlit roli počátečních podmínek

(33) Vezmi největší řešení 3-dim vlnové rovnice a zkonvolujte ho s $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(0,0,n)}$. Napište asymptotické řešení pro velké časy t

(34) To samé pro $\sum_{n,m\in\mathbb{Z}^2} \delta(0,n,m)$

(35) To samé pro počáteční podmínky gaussovy

(36) Řešit rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial}{\partial t} = \Delta + U$$

rozkladem počáteční podmínky do vlastních funkcí operátoru $\Delta + U$

(37) Totéž pro Schrödingerovu rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} = i(\Delta + U)$$

(38) Vysvětlit, proč je řešení Schrödingerovy rovnice unitární (tedy $\|u(t,\cdot)\|$ se nemění v čase)

(39) Vysvětlit, co to je $e^{-\alpha\|x\|^2} * e^{-\beta\|x\|^2}$ když $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$ a $\operatorname{Re}\beta \geq 0$

(40) Odhadnout $\int_K^\infty \cos x^2 \varphi(x)$ $\varphi \in \mathcal{S}$

(41) Asymptotika Besselovy funkce $J_n(x)$, $x \to \infty$

(42) Gravitační síla mezi dvěma sférami
– co nejjednodušší výpočet

(43) Konformní zobrazení různých význačných množin v R^2, ~~[illegible]~~ přechází při konformním zobrazení rovnice $\Delta = 0$ na $\Delta = 0$

(44) Řešit okrajovou úlohu $\Delta = 0$ na polorovině a na kruhu (Poissonův vzorec)

(45) Laurentův rozklad $P(x)/Q(x)$ (polynomy)

(46) Laurentův rozklad $R(\lambda, A) = (\lambda J - A)^{-1}$
speciálně pro nilpotentní A

(47) Jak vypadají F. obrazy periodických distribucí (≡ difrakce krystalických látek)

(48) Distribuce v $\mathcal{S}'$, které jsou periodické versus periodické distribuce jako duál periodických testovacích funkcí

(49) Proč je distribuce s nosičem v bodě 0 nutně tvaru $\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n}{dx^n} \delta_0$

(50) Holomorfní funkce matice řady
$$f(A) = \int_{\text{křivka kolem spektra } A \text{ s indexem } 1} f(z) (A - \lambda J)^{-1} dz$$