7. Laplaceova transformace.

Definice. Definujeme prostor

$$L^1_+ := \big\{ f(t) : (0,+\infty) \to \mathbb{C} \text{ měřitelná a } \exists\, c\ in\mathbb{R},\ f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty) \big\}\,.$$

Poznámky.
- $L^1_+ \supsetneq L^1(0,+\infty)$
- $f \in L^1_+ \implies f \in L^1(0,K)$ pro $\forall K < +\infty$ (tj. je lokálně integrovatelná)
- $f(t) = e^{t^2} \notin L^1_+$

Značení. Pro $f(t) \in L^1_+$ značíme

$$c_f = \inf \big\{ c \in \mathbb{R} :\ f(t)e^{-ct} \in L^1(0,+\infty) \big\}$$

Obecně $f(t)e^{-c_f t} \notin L^1$, ale pro libovolné $c > c_f$ je $f(t)e^{-ct} \in L^1$.

Definice. Laplaceovu transformaci funkce $f(t) \in L^1_+$ definujeme

$$\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dt \qquad \forall p \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p > c_f\,.$$

Poznámky.
- přiřazuje funkci $f(t)$ funkci $F(p)$
- definice je korektní: $|f(t)|e^{-\operatorname{Re} pt}$ integrovatelná majoranta
- souvislost s Fourierovou transformací:

$$F(p) = \big[f(x)\widehat{\chi(x)e^{-\operatorname{Re} px}} \big]\big(\frac{\operatorname{Im} p}{2\pi}\big)\,.$$

Věta 7.1. [Základní vlastnosti L.t.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom
(1) $F(p) \in \mathcal{H}\big(\{p \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} p > c_f\}\big)$
(2) $\frac{d^k}{dp^k} F(p) = \mathcal{L}\big\{(-t)^k f(t)\big\}[p]$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$
(3) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Re} p \to +\infty$, $\operatorname{Im} p \in \mathbb{R}$ pevné
(4) $F(p) \to 0$ pro $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$, $\operatorname{Re} p > c_f$ pevné

Příklady.
- $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$ $(c_f = 0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, $\operatorname{Re} p > a = c_f$
- $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0 = c_f$, pro $\alpha > -1$

Věta 7.2. [Vlastnosti L.t.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Potom
(1) $\mathcal{L}\big\{f(\alpha t)\big\}[p] = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p/\alpha]$ pro $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > \alpha c_f$

(2) $\mathcal{L}\big\{f(t-\alpha)\big\}[p] = e^{-at}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p]$ pro $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > c_f$
(3) $\mathcal{L}\big\{e^{at}f(t)\big\}[p] = \mathcal{L}\big\{f(t)\big\}[p-a]$ pro $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + c_f$

Věta 7.3. [L.t. a derivace.] Nechť $f^{(j)}(t) \in L^1_+ \cap C([0,+\infty))$ pro $j = 0,\dots,n$. Potom

$$\mathcal{L}\big\{f^{(n)}(t)\big\}[p] = p^n F(p) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j f^{(n-1-j)}(0)\,.$$

Speciálně

$$\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}[p] = pF(p) - f(0)\,,$$
$$\mathcal{L}\big\{f''(t)\big\}[p] = p^2F(p) - f'(0) - pf(0)\,.$$

Definice. Pro $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$ definujeme konvoluci

$$\big[f * g\big](t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds \qquad t > 0$$

a nula pro $t < 0$.

Úmluva. Funkce z L^1_+ automaticky klademe rovné nula pro $t < 0$.

Lemma 7.1. [Konvoluce v L^1_+.]
(1) Nová definice konvoluce je ve shodě s definicí kapitoly 6.
(2) $f,\ g \in L^1_+ \implies [f*g](t)$ má smysl pro s.v. t a je prvkem L^1_+. Navíc: $c_{f*g} \le \max\{c_f, c_g\}$.

Věta 7.4. [L.t. a konvoluce.] Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$. Potom

$$\mathcal{L}\big\{[f*g](t)\big\}[p] = \mathcal{L}\{f(t)\}[p]\,\mathcal{L}\{g(t)\}[p]\,, \qquad \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_g\}\,.$$

Důsledek. [L.t. primitivní funkce.] Nechť $f(t) \in L^1_+$. Označ $h(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Pozorování: $h = f * 1$. Tedy $\mathcal{L}h[p] = F(p)/p$. Navíc: $c_f \le \max\{c_f, 0\}$.

Věta 7.5. [Prostota L.t.]
(1) Nechť $f(t) \in L^1_+$. Jestliže $\exists c^* \in \mathbb{R}$ tak, že $F(p) = 0$ pro všechna $p \in \mathbb{C}$, splňující $\operatorname{Re} p > c^*$, je $f(t) = 0$ skoro všude.
(2) Nechť $f(t)$, $g(t) \in L^1_+$. Jestliže $\exists c^* \in \mathbb{R}$ tak, že $F(p) = G(p)$ pro všechna $p \in \mathbb{C}$, splňující $\operatorname{Re} p > c^*$, je $f(t) = g(t)$ skoro všude.

Věta 7.6. [Inverze L.t.] Nechť $F(p) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1,\dots,z_n\})$, nechť $|F(p)| \le K|p|^{-2}$ pro $|p| > R$. Potom existuje $f(t) \in L^1_+$ tak, že $\mathcal{L}\{f(t)\}[p] = F(p)$. Dále platí vzorce

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{tz}\,dz = \sum_k \operatorname{res}_{z=z_k} F(z)e^{tz}\,.$$