

1. příklad. Definujeme

$$F(a) = \int_0^1 (x^a - 1)(x^a + 1) \frac{dx}{\ln x}.$$

- (i) pro která $a \in \mathbb{R}$ je integrál konečný ?
- (ii) derivujte podle a — podrobně ověřte předpoklady věty.
- (iii) dopočítejte $F(a)$.

2. příklad. Plocha $P \subset \mathbb{R}^3$ je určena podmínkami

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = 9\} \cap \{x > 0\}$$

- (i) najděte parametrizaci P a křivky γ , která tvoří *okraj* P
- (ii) zvolte orientaci P a γ tak, aby γ obíhala kolem P v kladném smyslu — načtrněte!
- (iii) vypočítejte křivkový integrál (2. druhu) $\int_\gamma F \cdot ds$, kde $F = (x, -z, y)$ jednak přímo, jednak integrací přes P pomocí Stokesovy věty

3. příklad. Je dána úloha

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_0^1 (1+x)y \exp x + \frac{(y')^2}{2} \exp x \, dx \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0. \end{aligned}$$

- (i) najděte *všechny* extrémaly
- (ii) vyšetřete, jaký druh extrému představují

4. příklad. Funkce f je sudá, 2π -periodická, a platí

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi/2] \\ x - \pi/2, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

- (i) spočítejte Fourierovy koeficienty
- (ii) napište Fourierovu řadu
- (iii) nakreslete graf $f(x)$ na intervalu $[0, 4\pi]$
- (iv) zformulujte větu o konvergenci Fourierovy řady; vysvětlete podrobně (příp. nakreslete), co z ní plyne v daném případě
- (v) napište Parsevalovu rovnost: obecně a pro tento případ

$$\textcircled{1} \quad F(a) = \int_0^1 \underbrace{(x^a+1)(x^a-1)}_{f(a,x)} \frac{dx}{\ln x} ;$$

(a)

$$f = \frac{x^{2a}-1}{\ln x} ;$$

$$x \rightarrow 1^- : f(x) \sim 1 \quad \text{O.K.}$$

$$x \rightarrow 0^+ : |f(x)| \leq x^{2a}+1 \cdot \frac{1}{|\ln x|} \leq C(x^{2a}+1)$$

$$\text{know. pro } 2a > -1 : a > -\frac{1}{2}$$

$$\text{melot: } \int_0^1 x^b < \infty \Leftrightarrow b > -1.$$

(b) $f(a, \cdot)$ mēntelne' $\Leftarrow$ majorē

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2x^{2a} \quad \text{pro } \forall x \in (0,1).$$

majorantē: $\eta > -\frac{1}{2}$ de' : $J = (\eta, \infty)$

$$\sup_{a \in J} \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) = \sup_{a \in (\eta, \infty)} 2x^{2a} = 2x^{2\eta} \in L^1(0,1).$$

↑
 $x \in (0,1)$ - exponent minimālē

$a_0 = 0$ (BUNO $\eta < 0$) : $f(0, x) \equiv 0 \in L^1(0,1).$

$$F'(a) = 2 \int_0^1 x^{2a} dx = \frac{2}{2a+1} \quad \forall a > -\eta ;$$

↑ librē: $\forall a \geq 0$.

$$\Rightarrow F(a) = \ln(2a+1) + C$$

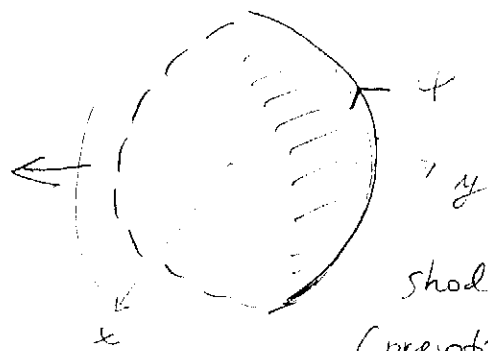
$$F(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$(2) \quad P = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9\} \cap \{x > 0\}$$

$$\varphi: \quad x = 3 \cos u \cos v$$

$$y = 3 \sin u \cos v \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z = 3 \sin v \quad ; \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



shodce:
(prevedenie
soustava)

varianta: $x = 3 \cos u \sin v$

$$y = 3 \sin u \sin v$$

$$z = 3 \cos v$$

$$u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v \in (0, \pi)$$

2. varianta: $x = \sqrt{9 - u^2 - v^2}$ $(u, v) \in \Omega = B(0, 3)$.

$$y = u$$

$$z = v$$

okraj je: $\psi: \quad x = 0$
 $y = 3 \cos t \quad t \in [0, 2\pi]$
 $z = 3 \sin t$

$$\underline{F} = (x, -z, y); \quad \text{rot } F = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = (2, 0, 0).$$

vypočet primo: $\psi' = (0, -3 \sin t, 3 \cos t)$

$$F \circ \psi = (0, -3 \sin t, \cos t)$$

$$I = \int_0^{2\pi} (F \circ \psi) \cdot \psi' dt = \int_0^{2\pi} 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t dt = 18\pi.$$

hodnotenie: param P: 2b

křivky 1b

shoda: 1b

primo: 2b

Stokes 2b

Gauss: $I = \int_P \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{dS}$; $\partial_u \varphi = 3(-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0)$
 $\partial_v \varphi = 3(-\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$

$$\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi = 9(\cos u \cos^2 v, \dots)$$

$$\operatorname{rot} \underline{F} \circ \varphi = (2, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\Omega} 18 \cdot \cos u \cos^2 v \, du \, dv = 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \, dv \\
 &= 18 \cdot \left[\sin u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = 18\pi.
 \end{aligned}$$

Kugel: Kart.: $\partial_u \varphi = \left(\frac{-u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}, 1, 0 \right)$

$$\partial_v \varphi = \left(\frac{-v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}, 0, 1 \right)$$

$$\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi = (1, \dots)$$

$$\operatorname{rot} \underline{F} \circ \varphi = (2, 0, 0)$$

$$\int_{\Omega} 2 \, du \, dv = 2 \cdot \lambda_2(\Omega) = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18\pi.$$

$$(3) \quad \phi(y) = \int_0^1 (1+x)e^x y + \frac{1}{2} e^x (y')^2 dx; \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$f_y = (1+x)e^x \quad \text{E.L.} \quad (-e^x y')' + (1+x)e^x = 0$$

$$f_x = e^x x \quad -e^x y'' - e^x y' + (1+x)e^x = 0$$

$$y'' + y' = 1+x;$$

$$\text{F.S.: } \lambda^2 + \lambda = 0; \quad \lambda = 0, -1 \quad \{1, e^{-x}\}.$$

$$y_p = (Ax+B) \cdot x = Ax^2 + Bx$$

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

$$2A + 2Ax + B = 1+x$$

$$2A + B = 1$$

$$2A = 1 \quad : \quad A = \frac{1}{2}; B = 0$$

$$y_p = \frac{x^2}{2}$$

$$y_0(x) = \alpha + \beta e^{-x} + \frac{x^2}{2}$$

$$x=0: \quad \alpha + \beta = 0 \quad ; \quad (-1)$$

$$x=1: \quad \alpha + \beta e^{-1} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\beta(e^{-1} - 1) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}}{2(1 - \frac{1}{e})} = \frac{e^x}{2(e-1)}; \quad \alpha = -\beta.$$

? (globální) extrém: $f_{zz} = e^x > 0$: podlezení: (lok.) minimum
 $f_{yz} = f_{xy} = 0$.

Jacobi: $(e^x u')' = 0$

$$e^x u' = c$$

$$u' = c e^{-x}$$

obecné řešení: $\boxed{u = d - c e^{-x};}$

$$u(0) = 0 \Rightarrow d = 0; \quad u(x) = -c e^{-x}$$

podmínka $u(x_0) = 0$ pro $x_0 \in (0, 1] \Rightarrow c = 0$;

tj. $u \equiv 0$.

sčít. nejmenší konjugovaný bod:

$$\text{meloli } y(x) = \alpha + \beta e^{-x} + \frac{x^2}{2}$$

je lokální minimum

4) $f(x)$ mod', 2π -periódica; $= \begin{cases} 0; & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x - \frac{\pi}{2}; & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

mod' $\Rightarrow f'_x = 0 \neq \frac{1}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} (x - \frac{\pi}{2})^2 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

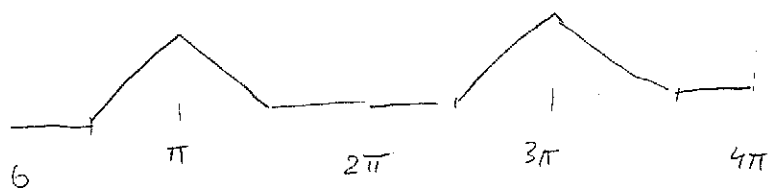
$$a_k \cdot \frac{\pi}{2} = \int_{\pi/2}^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \cos kx dx = \underbrace{\left[(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin kx dx$$

$$= -\frac{1}{k} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{k^2} \left(\cos k\pi - \cos \frac{k\pi}{2} \right) = \frac{1}{k^2} \left((-1)^k - \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

$f(x)$ mod', 2π -periódica C^1 : $f(x) = F_p(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos \frac{k\pi}{2}}{k^2} \cos kx$

pro $\forall x \in \mathbb{R}$

graf:



Parseval: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$

(LS) $\frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (x - \frac{\pi}{2})^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} (x - \frac{\pi}{2})^3 \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^2}{12}$

(PS): $\frac{\pi^2}{32} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \left((-1)^k - \cos \frac{k\pi}{2} \right)^2}{\pi^2 k^4}$