14. Míra a integrál.

Značení. Jsou-li A_j, $j \in \mathbb{N}$ množiny, definuji

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ \exists j \in \mathbb{N}\ x \in A_j\} \tag{1}$$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{x : \ \forall j \in \mathbb{N}\ x \in A_j\} \tag{2}$$

- tzv. spočetné sjednocení/průnik. "Spočetný" je zkratka za "indexovaný přirozenými čísly". (Viz kapitola X. minulého semestru.) Termín spočetný se také zkracuje řeckým σ.

Definice. Nechť X je libovolná množina. Předpis μ, který množině $A \subset X$ přiřazuje číslo $\mu A \in [0, \infty]$, se nazývá míra v X, jestliže
(M1) $\mu\emptyset = 0$
(M2) $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$ disjunktní $\implies$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j\,.$$

Poznámka. Axiom (M2) speciálně implikuje, že jsou-li A, B disjunktní, je $\mu(A+B) = \mu A + \mu B$, neboli míra je aditivní, v plné obecnosti (M2) říká, že míra je σ-aditivní.

Příklady. ① počítací míra v $\mathbb{N}$: je-li $A \subset \mathbb{N}$ konečná, polož $\pi A =$ počet prvků A; je-li nekonečná, polož $\pi A = \infty$.
② Diracova míra v $\mathbb{R}$: je-li $A \subset \mathbb{R}$, polož $\delta_0(A) = 1$, pokud $0 \in A$, v opačném případě $\delta_0(A) = 0$.
③ intuitivní pojem plochy, objemu má vlastnosti míry v $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Věta 14.1. [Základní vlastnosti míry.] Nechť μ je míra. Potom
1. $A \subset B \implies \mu A \le \mu B$
2. $A_j \subset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$$

3. A_j, $j \in \mathbb{N}$ libovolné $\implies$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j$$

Poznámka. Cíl Lebesgueovy teorie: zavést míru, která množině $A \subset \mathbb{R}^n$ přiřazuje číslo, vyjadřující její n-dimenzionální objem. (1-dimenzionální objem = délka, 2-dimenzionální objem = plocha).
Další rozumné vlastnosti: míra se nemění posunutím, otočením; u známých těles dá to, co čekáme (objem koule, krychle.)
Následující pozoruhodné tvrzení ukazuje, že to není tak jednoduché.

Banach-Tarského paradox. Nechť B je koule o poloměru 1, nechť $\tilde{B}$ je koule o poloměru 2.
Existují množiny F_j, $j = 1, \ldots, N$ (vzájemně disjunktní) a množiny G_j, $j = 1, \ldots, N$ (vzájemně disjunktní) takové, že

$$B = \bigcup_{j=1}^{N} F_j\,, \qquad \tilde{B} = \bigcup_{j=1}^{N} G_j\,.$$

Navíc, G_j vznikne z F_j posunutím a otočením.

Definice. Interval v $\mathbb{R}^n$: pro $n = 1$ víme, pro $n \geq 2$ je to kvádr, tj. kartézský součin

$$\begin{aligned} I &= I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \\ &= \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n : \ x_j \in I_j, \ j = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

kde $I_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ jsou intervaly v $\mathbb{R}$.
Definujeme n-dimenzionální objem intervalu $|I|$ jako jeho délku (pokud $n = 1$), pro $n \geq 2$ jako součin délek stran, přičemž platí speciální úmluva

$$0 \cdot \infty = 0\,.$$

Příklady. Předchozí definice speciálně zahrnuje: jednobodová množina je interval (kartézský součin jednobodových intervalů), její n-dimenzionální objem je 0 (pro $\forall n$).
Podprostor nižší dimenze je též interval s nulovým objemem, např.

$$J = \{\langle x, y \rangle : \ x \in \mathbb{R}, \ y = 0\}$$

je interval v $\mathbb{R}^2$ ($J = \mathbb{R} \times [0,0]$), jeho dvoudimenzionální objem je $\infty \cdot 0 = 0$.

*** Věta 14.2.** [Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.] Existuje $\mathcal{M}_n$ systém podmnožin $\mathbb{R}^n$ a funkce $\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$ s následujícími vlastnostmi:
(A1) $\emptyset \in \mathcal{M}_n$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n$
(A2) $A \in \mathcal{M}_n \implies \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}_n$
(A3) $A_j \in \mathcal{M}_n$, $j \in \mathbb{N} \implies \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, $\cap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}_n$
Dále: λ_n má na $\mathcal{M}_n$ vlastnosti míry, tj.
(M1) $\lambda_n \emptyset = 0$
(M2) $A_j \in \mathcal{M}_n$ ($j \in \mathbb{N}$) disjunktní $\implies$

$$\lambda_n \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n A_j \, .$$

Terminologie: λ_n se nazývá Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$, neboli Lebesgueova n-dimenzionální míra. Systém $\mathcal{M}_n$ jsou tzv. Lebesgueovsky měřitelné, neboli λ_n-měřitelné množiny v $\mathbb{R}^n$.
Dále platí:
(R1) $I \subset \mathbb{R}^n$ je interval $\implies I \in \mathcal{M}_n$ a $\lambda_n I = |I|$
(R2) $A \in \mathcal{M}_n$, B vznikne z A posunutím, otočením nebo symetrií $\implies$ $B \in \mathcal{M}_n$ a $\lambda_n B = \lambda_n A$
(R3) $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $F \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená $\implies G, F \in \mathcal{M}_n$

Poznámka. Existují množiny v $\mathbb{R}^n$, které nepatří do $\mathcal{M}_n$. Jsou to tzv. neměřitelné množiny; snaha přiřadit jim míru by vedla ke sporu. Příkladem neměřitelných množin jsou G_j, F_j v Banach-Tarského paradoxu.
Systém $\mathcal{M}_n$ je nicméně pro praktické účely dostatečný. Běžnými množinovými operacemi neměřitelné množiny nevznikají.

Poznámka. Důležitý pojem: množina míry nula neboli nulová množina je taková měřitelná $A \subset \mathbb{R}^n$, že $\lambda_n A = 0$.
Příklady: jednobodová množina, podmožina nižší dimenze (přímka v $\mathbb{R}^2$, rovina v $\mathbb{R}^3$).
Spočetná množina má míru 0, spočetné sjednocení spočetných množin má míru 0.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Řekneme, že výrok $V(x)$ platí skoro všude v M, jestliže existuje $N \subset M$ nulové míry tak, že $V(x)$ platí pro $\forall x \in M \setminus N$.
Zkratka: s.v.

Příklady. ① $\sin x \neq 0$ s.v. $\mathbb{R}$.
② skoro každé reálné číslo je iracionální.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná. Funkce $f(x) : M \to [-\infty, \infty]$ se nazve měřitelná, jestliže pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in M : \ f(x) > \alpha\}$$

měřitelná.

Lemma 14.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f(x) : M \to [-\infty, \infty]$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je měřitelná
(2) pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in M : \ f(x) \in I\}$$

měřitelná.

Definice. Charakteristická funkce množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Funkce $s(x) : M \to \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá, jestliže

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{M_j}(x) \,. \tag{3}$$

kde $a_j \in \mathbb{R}$ a $M_j \subset M$ jsou měřitelné množiny.

Poznámky.
• jednoduchá funkce je měřitelná.
• jednoduchou funkci lze zapsat více způsoby, např.

$$2\chi_{(0,1)} + \chi_{[1,2)} = \chi_{(0,1)} + \chi_{(0,2)} \,;$$

vždy existuje zápis, při kterém M_j jsou vzájemně disjunktní.

Lemma 14.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, nechť $f(x) : M \to [0, \infty]$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je měřitelná;

(2) existují $s_n(x)$ jednoduché funkce takové, že $0 \le s_n(x) \nearrow f(x)$ pro $\forall x \in M$.

Vysvětlení značení. Symbol $a_n \nearrow a$ značí: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to a$, přičemž $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost.

Definice. [Lebesgueův integrál nezáporné funkce.] Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina.
1. je-li $s(x) : M$ jednoduchá funkce, vyjádřená v (3), definujeme

$$\int_M s(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} a_j \lambda_n(M_j)\,.$$

2. je-li $f(x)$ nezáporná, měřitelná, definujeme

$$\int_M f(x)\,dx$$

jako supremum množiny

$$\Big\{ \int_M s(x)\,dx : \ s(x) \text{ jednoduchá, } 0 \le s(x) \le f(x) \text{ pro } \forall x \in M \ \Big\}\,.$$

Poznámky.
• definice je korektní: integrál jednoduché funkce nezávisí na tom, jak je vyjádřena. Druhá část definice dává pro jednoduchou funkci stejný výsledek jako první.
• přímo z definice vidíme: je-li $0 \le g(x) \le f(x)$ pro $\forall x \in M$, je

$$(L)\int_M g(x)\,dx \le (L)\int_M f(x)\,dx\,,$$

neboť vpravo je supremum větší množiny.
• tento integrál se nazývá Lebesgueův n-rozmerný integrál, nebo integrál dle n-rozměrné Lebesgueovy míry. Chceme-li zdůraznit, že jde o Lebesgueův integrál (na rozdíl od Newtonova, nebo Riemannova), píšeme $(L)\int_M f(x)\,dx$. Není-li řečeno jinak, máme na mysli vždy Lebesgueův integrál.
Jiné zápisy Lebesgueova integrálu:

$$\int_M f\,d\lambda_n\,, \qquad\qquad \int_M f(x)\,d\lambda_n(x)\,,$$

chceme-li zdůraznit míru, podle níž se integruje, nebo míru i proměnnou. Ve speciálním případě funkce jedné proměnné, tj. integrace v $\mathbb{R}$, používáme též značení $\int_a^b f(x)\,dx$, s významem $\int_{(a,b)} f(x)\,d\lambda_1(x)$.

Věta 14.3. [Leviho věta.] Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina. Nechť $f_n(x)$, $f(x)$ jsou měřitelné funkce, a $0 \le f_n(x) \nearrow f(x)$ pro $\forall x \in M$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\,dx = \int_M f(x)\,dx\,.$$

Lemma 14.3. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou nezáporné, měřitelné v M. Potom

$$\int_M f(x) + g(x)\,dx = \int_M f(x)\,dx + \int_M g(x)\,dx\,.$$

Definice. Definujeme kladnou resp. zápornou část funkce $f(x)$ jako

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}\,, \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\}\,. \end{aligned}$$

Pozorujeme: $0 \le f^+$, $f^- \le |f|$, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.
Pokud $f(x)$ je měřitelná, jsou $f^+(x)$, $f^-(x)$ měřitelné.

Definice. Je-li $f(x) : M \to [-\infty, \infty]$ měřitelná funkce, definujeme její Lebesgueův integrál přes M jako

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M f^+(x)\,dx - \int_M f^-(x)\,dx\,,$$

má-li výraz vpravo smysl.

Poznámky.
• Výraz vpravo nemá smysl (a tedy integrál neexistuje), právě když $\int_M f^+ = \int_M f^- = \infty$.
• množinu funkcí, pro něž integrál existuje (konečný, nebo nekonečný), značíme $L^*(M)$.
• množinu funkcí, pro něž integrál existuje a je konečný, značíme $L(M)$. Zjevně $L(M) \subset L^*(M)$.

Důležitá poznámka. Jestliže $f(x) = g(x)$ skoro všude v M, pak

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M g(x)\,dx$$

(má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.)

Doplnění definice. Nechť $f(x)$ je definována skoro všude v M (tj. v $M \setminus N$, kde míra N je nula). Potom integrál funkce $f(x)$ definuji jako

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M \tilde{f}(x)\,dx\,,$$

kde $\tilde{f(x)}$ je $f(x)$, dodefinovaná v N libovolně[1] (např. nulou).

Věta 14.4. [Vlastnosti $L(M)$.]
(1) $f(x) \in L(M) \implies f(x)$ je konečná skoro všude v M
(2) $f(x),\, g(x) \in L(M) \implies \alpha f(x),\, f(x)+g(x) \in L(M)$ a platí

$$\int_M \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_M f(x)\,dx$$
$$\int_M f(x)+g(x)\,dx = \int_M f(x)\,dx + \int_M g(x)\,dx$$

(3) $f(x) \in L(M) \implies |f(x)| \in L(M)$ a platí

$$\left|\int_M f(x)\,dx\right| \le \int_M |f(x)|\,dx\,.$$

(4) $f(x)$ měřitelná, $|f(x)| \le g(x)$ skoro všude v M, kde $g(x) \in L(M) \implies f(x) \in L(M)$

Poznámka. Záměná limity a integrálu, neboli rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\,dx = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \qquad (*)$$

obecně neplatí. Příklad: $f_n(x)(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$. Potom $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, přitom $f_n(x) \to 0$ v $\mathbb{R}$, tedy vlevo je 1, vpravo 0.
Rovnost (*) platí, pokud
• navíc $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v M, a M je omezená množina (viz věta 13.2.) To jsou pro praktické účely příliš silné předpoklady.
• navíc $0 \le f_n(x) \nearrow f(x)$ skoro všude v M – to je Leviho věta.
• třetí případ je následující věta.

[1]Neovlivní výsledek díky předchozí poznámce.

Věta 14.5. [Lebesgueova věta.] Nechť funkce $f_n(x)$, $f(x)$ jsou měřitelné v M, $f_n(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in M$. Nechť existuje $g(x) \in L(M)$ tak, že $|f_n(x)| \le g(x)$ skoro všude v M. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\,dx = \int_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Opakování. Newtonův integrál funkce $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ definujeme jako

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\,,$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Vztah mezi Newtonovým integrálem a jednorozměrným Lebesgueovým integrálem osvětluje následující věta.

Věta 14.6. [Výpočet Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}$.] Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť je splněn jeden z předpokladů:
1. $f(x) \ge 0$ (resp. $f(x) \le 0$) všude v I
2. $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$

Potom

$$\int_a^b f\,d\lambda_1 = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\,,$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

Poznámky.
- věta v podstatě tvrdí rovnost Lebesgueova a Newtonova integrálu (za daných předpokladů)
- předpoklad 1 nebo 2 je podstatný; lze najít spojitou funkci, jejíž Lebesgueův integrál neexistuje, avšak přírustek primitivní funkce má smysl (dokonce je konečný).
- předpoklad 2 se může ověřovat pomocí bodu 1 (neboť $|f| \ge 0$)

Věta 14.7. [Leviho věta pro řady.] Nechť $f_k(x)$ jsou nezáporné, měřitelné v M. Potom

$$\int_M \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k(x)\,dx\,.$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty\,.$$

Věta 14.8. [Lebesgueova věta pro řady.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje pro s.v. $x \in M$, nechť existuje $g(x)$ taková, že $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq g(x)$ pro $\forall n$, s.v. $x \in M$, přičemž $\int_M g(x)\,dx < \infty$. Potom

$$\int_M \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k(x)\,dx\,.$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\,.$$

Poznámka. Na omezeném intervalu mi jako integrovatelná majoranta může posloužit konstantní funkce. To se často používá, získáváme tím tuto variantu Lebesgueovy věty: nechť $f_n(x) \to f(x)$, nechť $|f_n(x)| \leq C$ pro s.v. $x \in I$, kde I je omezený interval. Potom $\int_I f_n \to \int_I f$.

Poznámka. Názorný význam Lebesgueova integrálu: je-li $f(x)$ nezáporná v $M \subset \mathbb{R}^n$, je její integrál (dle n-rozměrné míry) roven (n+1)-rozměrné míře množiny pod grafem, tj.

$$\int_M f d\lambda_n = \lambda_{n+1}\big(\{\langle x_1,\ldots,x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1};\ 0 < f(x_1,\ldots,x_n) < x_{n+1}\}\big)\,.$$

Srovnej se situací pro $n = 1$ - integrál funkce jedné proměnné se rovná plocha (tj. dvojrozměrná míra) množiny pod grafem.

Poznámka. Ještě ke značení: je-li $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, tak Lebesgueův integrál značíme $\int_M f\,d\lambda_n$, nebo $\int_M f(x)\,dx$, nebo $\int_M f(x)\,d\lambda_n(x)$. Závisí na tom, zda chceme zdůraznit míru, nebo proměnnou, nebo obojí. Pokud chceme vyznačit jednotlivé složky proměnné, píšeme $\int_M f(x,y)\,dxdy$, nebo $\int_M f(x,y,z)\,dxdydz$.
Význam symbolu je ale vždy tentýž. Někdy se také píše $\iint$, $\iiint$ místo $\int$, aby se zdůraznilo, že jde o dvourozměrný (třírozměrný) integrál.

Značení. Pro $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ značíme proměnnou $\langle x,y\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Definujeme projekci M do $\mathbb{R}^n$

$$\Pi_n M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists y \in \mathbb{R}^m,\ \langle x,y\rangle \in M\}$$

a pro $x \in \Pi_n$ pevné definujeme řež množinou M vzhledem k y

$$M^x = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \langle x,y\rangle \in M\}\,.$$

Jestliže $f = f(x,y)$, tak $f(x,\cdot)$ značí funkci proměnné y, které vznikne fixováním x.

Věta 14.9. [Fubiniho věta.] (S použitím předchozího značení.) Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$, nechť $f(x,y) \in L^*(M)$. Potom pro skoro všechna $x \in \Pi_n$ je $M^x \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná množina, a $f(x,\cdot) \in L^*(M^x)$.
Označíme-li $g(x) = \int_{M^x} f(x,\cdot) d\lambda_m$, je $g(x) \in L^*(\Pi_n)$ a platí

$$\int_M f\, d\lambda_{n+m} = \int g\, d\lambda_n$$

neboli (v názornějším značení)

$$\int_M f(x,y)\, dxdy = \int_{\Pi_n} \left(\int_{M^x} f(x,y)\, dy \right) dx\,.$$

Příklad. $M = \{\langle x,y \rangle \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 1\}$, $f(x,y) = |x|$. Potom $\Pi_1 M = (-1,1)$, $M^x = (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$, tedy

$$\int_M |x|\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |x|\, dy \right) dx = \frac{4}{3}\,.$$

Poznámky. Mechanické použití Fubiniho věty v případě, že $f \notin L^*(M)$, tj. původní vícenásobný integrál neexistuje, vede k nesmyslným výsledkům:
$M = (0,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x+1 \\ -1, & y < x < y+1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Potom $\int_M f(x,y)\, dxdy$ neexistuje (integrál kladné i záporné části je ∞), avšak

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\, dy \right\} dx = -\frac{1}{2}\,,$$

zatímco

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\, dx \right\} dy = \frac{1}{2}\,.$$

• předpoklad $f \in L^*(M)$ je určitě splněn, pokud $f \geq 0$, nebo pokud $\int_M |f| < \infty$ (druhý předpoklad může ověřit pomocí Fubiniho věty, neboť $|f| \geq 0$).

• speciálně, výpočet objemu pomocí Fubiniho věty:

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_M 1\, d\lambda_{n+m} = \int_{R^n} \left\{ \int_{M^x} 1\, d\lambda_m \right\} d\lambda_n = \int_{R^n} \lambda_m(M^x)\, d\lambda_n$$

Příklad. Použití Fubiniho věty k výpočtu původně jednorozměrného integrálu:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx\,.$$

Integrovaná funkce je přírustek, tj. integrál derivace

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b x^y\, dy\,.$$

Dvojím užitím Fubiniho věty ($M = (0,1) \times (a,b)$)

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, dy \right) dx = \int_M x^y\, dx dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, dx \right) dy = \ln \frac{b+1}{a+1}\,.$$

Opakování. Věta o substituci pro Newtonův integrál:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\, dx$$

kde $\varphi(x) : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je vzájemně jednoznačná, a $\varphi'(x) \neq 0$.

Definice. Pro $\varphi(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme Jakobián

$$J\varphi(y) = \det \nabla\varphi(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Definice. Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $\varphi(y) : \Omega \to M$ se nazve difeomorfismus, jestliže:
1. $\varphi(y)$ je vzájemně jednoznačné,
2. $\varphi(y)$ je C^1 (tj. parciální derivace jsou spojité),
3. $J\varphi(y) \neq 0$ pro $\forall y \in \Omega$.

* **Věta 14.10.** [Věta o substituci.] Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, $\varphi(y) : \Omega \to M$ je difeomorfismus a $f(x) : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Potom

$$\int_M f(x)\,dx = \int_\Omega f(\varphi(y)) J\varphi(y)\,dy\,,$$

neboli

$$\int_M f\,d\lambda_n = \int_\Omega (f \circ \varphi) J\varphi\,d\lambda_n\,.$$

(Má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.)

Poznámka. Význam věty o substituci pro vícerozměrné integrály je často v tom, že získám příjemnější (z hlediska Fubiniho věty) tvar množiny, přes kterou integruji.

Příklad. Plocha množiny M, ohraničené přímkami: $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 3x$, $y = 4x$. Substituce: $u = x + y$, $v = y/x$, neboli toto je zobrazení $\varphi^{-1} : M \to \Omega$, kde $\Omega = (1,2) \times (3,4)$.
$\varphi : \Omega \to M$ má tvar $x = u/(1+v)$, $y = uv/(1+v)$, jakobián $J\varphi = u/(1+v)^2$. Tedy

$$\lambda_2(M) = \int_M 1\,dxdy = \int_\Omega \frac{u}{(1+v)^2}\,dudv = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{u}{(1+v)^2}\,dv \right) du = \frac{3}{40}\,.$$

Polární souřadnice. Substituce $x = r\cos u$, $y = r\sin u$, tj. $\varphi : \langle r, u\rangle \mapsto \langle x, y\rangle$ je difeomorfismus z $\Omega = (0,\infty)\times(0,2\pi)$ do $\mathbb{R}^2\setminus N$, kde $N = \{\langle x, y\rangle;\ x \geq 0,\ y = 0\}$. (To, že obrazem není celé $\mathbb{R}^2$, nevadí, neboť chybějící množina N má dvourozměrnou míru 0.) Jakobián je r.

Sférické souřadnice. Substituce $x = r\cos u\cos v$, $y = r\sin u\cos v$, $z = r\sin v$. Zobrazení $\varphi : \langle r, u, v\rangle \mapsto \langle x, y, z\rangle$ je difeomorfismus z $\Omega = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ do $\mathbb{R}^3 \setminus N$, kde N je polorovina $y = 0$, $x \geq 0$, tj. opět množina míry nula. Jakobián je $r^2\cos v$.
Názorně: u…zeměpisná délka, v…zeměpisná šířka (póly leží na ose z.)