Derivace po druhé.

1. Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte

   (a)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(ax)-\exp(bx)}{\sin ax - \sin bx}$$

   (b)
   $$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x-10)}$$

   (c)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x-\sin x}$$

   (d)
   $$\lim_{x\to \infty} x\big(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\big)$$

   (e)
   $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

   (f)
   $$\lim_{x\to 1-} \left(\frac{4\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$$

   (g)
   $$\lim_{x\to \infty} \frac{x^a}{\exp(bx)}$$

   (h)
   $$\lim_{x\to 0+} \big(\sin x\big)^{\frac{\pi}{\ln x}}$$

2. Spočítejte derivace (i jednostranné) všude, kde to má smysl, funkce $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-x}$.

3. Spočítejte první a druhou derivaci funkce $f(x)=\sin(x|x|)$.

4. Příklad spojité funkce, jejíž derivace není spojitá:
   $$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

5. Dokažte, že $\sin x < x$ pro každé $x>0$. (Uděláno na přednášce.)

6. Dokažte, že $\operatorname{tg} x > x$ pro $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

7. Dokažte, že $\operatorname{arctg} x < x$ pro $x\in(0,\infty)$.

8. Dokažte, že $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ pro $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

9. Dokažte, že $\ln x < x-1$ pro $x\in(0,\infty)\setminus\{0\}$.