Lemma 1. Je-li $a > 1$, $b < 1$, je $a + b - ab > 1$.

Důkaz. Podle předpokladů je $1 - b > 0$. Tedy $a(1 - b) > 1 - b$ a

$$a + b - ab = a(1 - b) + b > 1 - b + b = 1\,.$$

Lemma 2. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná čísla a $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Potom $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

Důkaz. (Indukcí.)

[n=1] Nutně $a_1 = 1$, závěr platí.

[n→n+1]. Jsou dána a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1}, a $a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = 1$. Chceme dokázat, že

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n + a_{n+1} \geq n + 1\,. \tag{1}$$

Jestliže všechna a_i jsou rovna 1, závěr platí. V opačném případě je mezi nimi číslo větší než 1 a také číslo menší než 1.

BÚNO uspořádáme čísla tak, že $a_n > 1$, $a_{n+1} < 1$. Podle Lemmatu 1 je

$$a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1} > 1\,. \tag{2}$$

Nyní definujeme čísla b_i takto: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $\ldots$, $b_{n-1} = a_{n-1}$ a konečně $b_n = a_n a_{n+1}$. Zjevně b_i jsou kladná a $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$. Protože pro n Lemma dle indukčního předpokladu platí, máme

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq n$$

$$\text{neboli}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} \geq n \tag{3}$$

Sečtením nerovností (2), (3) dostaneme (1).

Věta. (AG nerovnost.) Nechť x_1, $x_2 \ldots x_n$ jsou nezáporná čísla. Potom

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,.$$

Důkaz. Je-li některé $x_i = 0$, je nalevo nula, pravá strana je nezáporná, závěr platí.

V opačném případě označ $X = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ a polož $a_i = x_i/X$. Tedy $a_i > 0$ a $a_1 a_2 \ldots a_n = x_1 x_2 \ldots x_n / X^n = 1$.

Dle Lemmatu 2 je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{X}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq n\,,$$

což je hledaný závěr.