

Brexit, Condorcet - protipříklady demokracie

Dalibor Pražák, KMA MFF UK

1 Úvod.

Dle všeobecně rozšířeného mínění spočívá demokracie v tom, že společná rozhodnutí se přijímají hlasováním. To má zaručit, že i v případě jakkoliv složitých a kontroverzních záležitostí bude přijato řešení, které je (alespoň z hlediska většiny občanů) nejvíce uspokojivé.

Skutečnost je ovšem složitější: jakmile stojíme mezi více než dvěma alternativami, může dojít k situaci, kdy každé přijaté rozhodnutí nechává většinu občanů nespokojenou. Tento paradox, objevený již před více než dvěma sty lety de Condorcetem, nás inspiroval k návrhu „modelu brexitu“. Náš model nabízí jednoduché a snad i nekontroverzní vysvětlení patové situace, v které se momentálně¹ nachází britská politika.

Ve druhé části se zabýváme modelem jiného politického problému: totiž stanovení optimální teploty ve společné kanceláři. Jde o jakousi složitější, kvantitativní verzi Condorcetova paradoxu, která ukazuje, že hlasování může vést k nejhorší (v jistém smyslu) ze všech možných variant.

V poslední části článku se pokusíme matematicky hlouběji zamyslet nad většinou a hlasováním. Ukážeme, že Condorcetův paradox má řešení, jež je prakticky zároveň prakticky nepoužitelné, a přesto, věříme, inspirativní – přesně jako pravá matematika!

2 Model brexitu.

Připomeňme, že matematický model je pokusem o zjednodušený, schematizovaný a zároveň zpřesněný popis nějaké situace. Jeho cílem je vystihnout podstatu, či jakousi logickou kostru studovaného problému.

V našem modelu brexitu předpokládáme, že se rozhoduje mezi třemi variantami:

A	setrvání v EU
B	měkký brexit
C	tvrdý (no deal) brexit

Dále předpokládáme, že občané británie (a potažmo členové parlamentu) jsou rozděleni do následujících tří skupin:

Skupina V_{rem} , o síle cca 40%, si přeje setrvání v EU, tedy variantu A. Jako druhou, leč horší možnost, vidí odchod na základě dohody, tj. B. Za nejhorší, ba přímo katastrofální, považuje tvrdý brexit, tj. C.

¹Psáno v září 2019.

Proti nim stojí skupina občanů V_{soft} , o něco slabší (cca 35%), která si přeje opustit EU, leč po dobrém, tj. variantu B. Jako druhou, leč podstatně horší možnost, připouští i tvrdý brexit, tj. C. Každopádně nejhorší je pro ně varianta A, setrvání v EU.

Konečně je zde nejmenší, leč výrazná skupina V_{rad} radikálních brexitářů o síle cca 25%. Pro ně je první volbou samozřejmě C. Na druhé místo (trochu paradoxně) kladou A: raději v EU zůstat (aspoň prozatím), než se pustit do polovičatého řešení B (které dle nich kombinuje to nejhorší z ostatních možností).

skupina	podíl	preferenze
V_{rem}	40%	$A \succ B \succ C$
V_{soft}	35%	$B \succ C \succ A$
V_{rad}	25%	$C \succ A \succ B$

Tvrdíme, že toto je dobrý model v tom smyslu, že z něj vyplývá přesně taková politická dynamika, jakou v Británii od roku 2016 pozorujeme.

Poznámka. Čtenář nemusí souhlasit s údaji v naší tabulce a ani to není nutné. Podstatné pro náš model jsou dvě věci: žádná ze skupin V_{rem} , V_{soft} , V_{rad} netvoří většinu a za druhé, preference jednotlivých skupin jsou dokonale zacykleny v tom smyslu, že každá z variant A, B a C má právě jedno první místo, právě jedno druhé místo, a právě jedno třetí místo.

3 Cyklická dynamika

Co tedy plyne z našeho modelu? Za prvé je jasné, že referendum dopadne v poměru 60% ku 40% ve prospěch „leave“. Všimněme si však již nyní, že referendum odhlíží od (klíčové) otázky, zda má být odchod tvrdý či měkký, a že vítězná většina $V_{\text{soft}} \cup V_{\text{rad}}$ není v tomto bodě jednotná.

Vlády se ujímá Theresa M., která, ač sama zastánkyní A, se poctivě snaží realizovat variantu B. To je v dané situaci rozumné řešení, nicméně nejvíce vyhovuje pouze menšině V_{soft} . Proti tomu se konstituuje nespokojená většina $V_{\text{rem}} \cup V_{\text{rad}}$. I tato většina je nejednotná v tom smyslu, že skupina V_{rem} stále doufá v možnost A, zatímco V_{rad} si naopak přeje radikálnější C. Buď jak buď, plán B se v parlamentu schválit nepodaří.

Vlády se ujímá Boris J.; na pořad dne se dostává možnost C. Tato situace, kterou nyní² pozorujeme, sjednotí k odporu V_{rem} a V_{soft} , kteří tvrdý brexit považují za potenciální katastrofu. Je pravděpodobné, že se odchod z EU opět odloží. To ovšem prakticky znamená setrvání při variantě A, v rozporu s výsledkem referenda. Ocitáme se na počátku celého bludného kruhu. Paradox, který zde pozorujeme, byl objeven markýzem de Condorcet již před více než dvěma sty lety. Tzv. Condorcetův cyklus spočívá v tom, že hlasujeme-li o jednotlivých variantách, pak většina (totiž $V_{\text{rem}} \cup V_{\text{rad}}$) preferuje A před B. Většina (totiž $V_{\text{rem}} \cup V_{\text{soft}}$) také preferuje B před C. Leč opět většina (totiž $V_{\text{soft}} \cup V_{\text{rad}}$) preferuje C před A. Vzniká tedy cyklické uspořádání většinové (či chceme-li, demokratické) preference

$$A \succ B \succ C \succ A$$

²Viz poznámku č. 1.

Důsledkem je právě pozorovaná nestabilita, či nekonzistence: jakýkoliv výsledek hlasování je znovu odvoláván a jeví se tedy jako libovolný.

4 Problém teploty v kanceláři.

Condorcetův cyklus vzniká z toho důvodu, že individuální preference jsou navzájem dokonale nekompatibilní: liší se vzájemně vždy přesunutím první volby na konec resp. poslední na počátek. Není to ale divné? Je takové zacyklení vůbec možné – není výše uvedený model brexitu přílišnou spekulací? Ukážeme si jednoduchý příklad, kdy totožné zacyklení vyplyne z preferencí vzhledem k jedné skalární veličině: teplotě ve společné kanceláři. Uvidíme zde také, že demokratické procedury mohou (za jistých okolností) dovést danou situaci k nejhorší z možných variant.

Náš model (který bychom také mohli nazvat modelem modelu brexitu), je následující: na jednom zapadlém úřadě pracují tři úředníci. Pracovní pohodu však začne nahlodávat spor o to, jak teplo by v kanceláři mělo být. Zatímco úředník U_1 je pro zachování současné teploty (varianta A), úředník U_2 by si přál teplotu nižší (varianta B). Naopak úředník U_3 se domnívá, že by se mělo více topit (varianta C).

Pokusme se navrhnout přesnější, kvantitativní model. Inspirováni názorem, že volby dnes rozhoduje spíše nespokojenost než pozitivní přání voličů, pokusíme se matematicky popsat míru nespokojenosti. Budeme předpokládat, že každý člověk má definovanou jistou optimální, tj. nejvíce žádoucí teplotu T_{opt} . Při okolní teplotě T je míra jeho nespokojenosti $\mathcal{N}(T)$ úměrná druhé mocnině odchylky od teploty optimální, tj.

$$\mathcal{N}(T) = (T - T_{\text{opt}})^2 \quad (1)$$

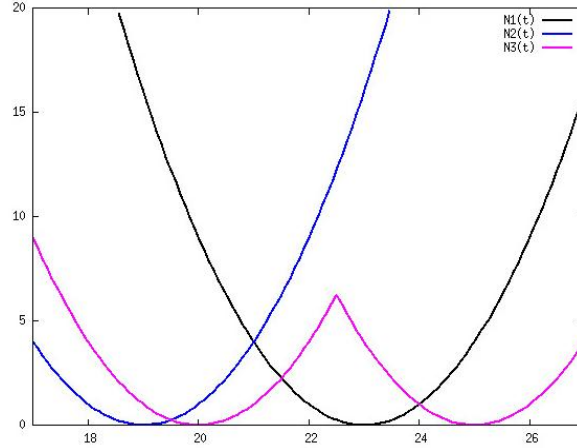
Předpokládejme, že U_1 považuje za optimální $T_1^{\text{opt}} = 23^\circ\text{C}$, zatímco otužilce U_2 se cítí nejlépe při $T_2^{\text{opt}} = 19^\circ\text{C}$. Zimomřivý U_3 by byl nešťastnější při $T_3^{\text{opt}} = 25^\circ\text{C}$. Leč pozor: posledně jmenovaný dostal k vánocům svetr, který je velmi slušivý, a především snižuje jeho teplotní optimum na 20°C .

Vyjádřeno vzorcem, nespokojenost jednotlivých úředníků při teplotě T je rovna

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(T) &= (T - 23)^2 \\ \mathcal{N}_2(T) &= (T - 19)^2 \end{aligned}$$

respektive

$$\mathcal{N}_3(T) = \min \left\{ (T - 25)^2, (T - 20)^2 \right\}$$



Zbývá přesněji kvantifikovat jednotlivé alternativy A, B a C. V kanceláři je ústřední topení (ovládané centrálním úřadem), které udržuje stálou teplotu $T_A = 22,5^\circ C$. Úředníci však objeví starou, nikdy nepoužívanou klimatizační jednotku. Ta dokáže ohřát místnost na teplotu $T_B = 26^\circ C$, nebo naopak ochladit na $T_C = 18^\circ C$. Nyní už můžeme sestavit celkovou tabulku nespokojenosti:

	A	B	C
U_1	0	9	25
U_2	12	49	1
U_3	6	1	4

Odsud snadno vyplývají relativní preference jednotlivých variant:

úředník	preference
U_1	$A \succ B \succ C$
U_2	$C \succ A \succ B$
U_3	$B \succ C \succ A$

Vidíme, že jsme opět obdrželi Condorcetův cyklus – většina se domnívá, že

$$A \succ B \succ C \succ A$$

Náš kvantitativní model má ale jednu velkou přednost: umožní vypočítat i *celkovou míru* nespokojenosti (při dané teplotě), kterou definujeme jako součet nespokojeností jednotlivých úředníků:

$$\mathcal{N}_{\text{CELKEM}}(T) = \mathcal{N}_1(T) + \mathcal{N}_2(T) + \mathcal{N}_3(T) \quad (2)$$

Rozšíříme tedy předchozí tabulku:

	A	B	C
U_1	0	9	25
U_2	12	49	1
U_3	6	1	4
CELKEM	19	59	30

a zjišťujeme, že měřeno celkovou mírou nespokojenosti, je z možných variant nejlepší A , tj. zachování současné teploty. Na druhém místě je C , tedy snížení na 18°C ; nejhorší pak B , její zvýšení na 26°C .

Představme si následující scénář: nejprve se hlasuje o otázce „chceme změnit teplotu v kanceláři?“. Většina (totiž U_2 spolu s U_3) hlasuje pro. Tedy varianta A je ze hry venku. (Je také možné, že se prostě ukáže, že klimatizační jednotku lze zapnout či přepnout, nikoliv však už vypnout.) V dalším hlasování ovšem vítězí B nad C (většina U_1 spolu s U_2). Demokratická procedura tedy, v tomto konkrétním scénáři, způsobí přechod od varianty s nejmenší celkovou nespokojeností (tj. A) k variantě k největší celkovou nespokojeností (tj. B).

5 Demokracie, většina a efektivní většina

Co totiž znamená, v hlubším smyslu, rozhodovat „většinou“? Každý ví, co to znamená většina – lze na tom objevit něco hlubšího? Hlubší pohled (lépe snad ale řečeno, obecnější či abstraktnější pohled) se pokusíme vyjádřit v následující definici.

Definice. Zobecněnou většinou na množině V rozumíme systém \mathcal{Z} podmnožin V , splňující následující axiomy:

$$(D1) \quad \emptyset \notin \mathcal{Z}, V \in \mathcal{Z}$$

$$(D2) \quad M \in \mathcal{Z} \text{ a } M \subset N \implies N \in \mathcal{Z}$$

$$(D3) \quad M \in \mathcal{Z} \implies (V \setminus M) \notin \mathcal{Z}$$

Prakticky viděno, V je množina všech voličů, zatímco \mathcal{Z} je systém všech zákonodárných množin – tedy takových podmnožin V , jimž přiznáváme právo učinit nějaké rozhodnutí. Uvedené axiomy neurčují \mathcal{Z} jednoznačně, spíše vyjadřují jisté obecné, minimální podmínky na to, aby takový systém rozumně fungoval.

Za prvé: nemá být přijato rozhodnutí, které nikdo nepodporuje, naopak má být přijato rozhodnutí, na němž se shodnou všichni. Za druhé, je-li jistá skupina M oprávněna učinit rozhodnutí, pak tím spíše i větší skupina N je oprávněna učinit rozhodnutí. Třetí axiom lze zformulovat ekvivalentně takto: jestliže V rozdělíme na dvě disjunktní skupiny, pak právo učinit rozhodnutí lze přiznat jenom jedné z nich.

Existuje více způsobů, jak definovat zobecněnou většinu v našem smyslu, tj. vyhovět uvedeným axiomům.

① Nechť $\#M$ značí počet prvků množiny M . Potom

$$\mathcal{Z}_{\text{maj}} = \{M \subset V; \#M > \frac{1}{2}\#V\}$$

je systém právě všech podmnožin V , které tvoří většinu v obvyklém smyslu.

② Zvolme pevně nějaký prvek $\delta \in V$ a definujme

$$\mathcal{Z}_D = \{M \subset V; \delta \in M\}$$

Právo činit rozhodnutí dáme skupině M právě tehdy, je-li v ní občan δ . Speciálně, právo činit rozhodnutí má jednoprvková množina $\{\delta\}$, tedy občan δ sám. Vidíme, že náš pojem zobecněné většiny zahrnuje speciálně i diktaturu.

③ Matematika samozřejmě hned napadne otázka, jak definovat většinu, je-li V nekonečná. Definice z bodu 1 nefunguje, ale můžeme položit

$$\mathcal{Z}_{\text{Fr}} = \{M \subset V; \#(V \setminus M) < \infty\}$$

Tedy v nekonečném parlamentu bychom za schválené považovali ty zákony, s nimiž souhlasí všichni až na konečně výjimku.

Nyní se však vraťme zpátky ke Condorcetově paradoxu a nešťastné nekonzistentní většině. Abstraktní pohled nám umožňuje vidět, kde je jádro problému: určitá většina schválí nějaké (částečné) rozhodnutí, leč tváří v tvář dalšímu rozhodnutí se rozkládá na dvě menšiny. Potřebovali bychom zesílit poslední axiom:

Definice. Efektivní zobecněnou většinou na množině V rozumíme systém \mathcal{Z} podmnožin V , splňující axiomy (D1)-(D3) výše a navíc (D4): jestliže $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ a $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{Z}$, pak buď (i) $M_1 \in \mathcal{Z}$, nebo (ii) $M_2 \in \mathcal{Z}$, ve smyslu: nastane právě jedna z možností (i), (ii).

Jinými slovy: pokud zákonodárnou množinu rozdělíme na dvě disjunktní části, tak právě jedna z nich bude i nadále zákonodárná. Definice je to pěkná; v matematice (občas na rozdíl od politiky) však musíme ihned pátrat po tom, zda je tato pěkná definice i splnitelná. Skeptickou odpověď nám dává právě slavná Arrowova věta o nemožnosti:

Věta 1. [Arrow 1950.] Nechť V je konečná. Pak jedinou efektivní zobecněnou většinou na V je diktatura.

Nechceme končit v pesimistickém duchu; necháme však již na čtenáři, aby se níže uvedenou větou nechal povznést k úvahám *sub specie aeternitatis*.

Věta 2. [Fishburn 1970, Kirmann a Sonderman 1972.] Nechť V je nekonečná. Potom existuje efektivní zobecněná většina, která rozšiřuje \mathcal{Z}_{Fr} . Jinými slovy, v níž žádná konečná množina není zákonodárná (a tedy nejde o diktaturu ani oligarchii).