Elementární modely v matematické biologii

Dalibor Pražák

Katedra matematické analýzy MFF UK

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼prazak/vyuka/

Elementární modely:

- jednoduché odvození
- jednoduchá analýza
- možno kombinovat do složitějších modelů
- překvapivě dobrá shoda s reálnými daty
- lze na nich demonstrovat obecné principy

Základní růstový model.

$x = x(t)$ ....velikost populace x v čase t

$$x(t+1) = x(t) + r \cdot x(t) = (1+r) \cdot x(t)$$

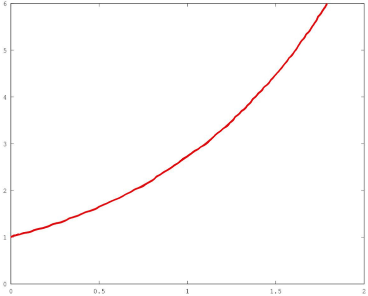
$$x(t+dt) = (1-dt) \cdot x(t) + dt(1+r) \cdot x(t)$$

$$\frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = r \cdot x(t) \qquad \ldots dt \text{ nekonečně malé}$$

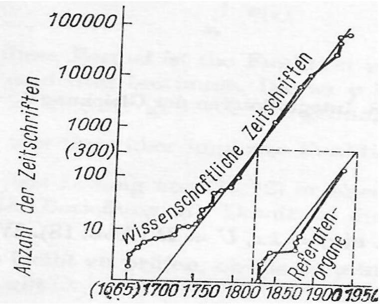
$$\boxed{x'(t) = r \cdot x(t)}$$

parametr modelu: $r > 0$ ... přirozená míra růstu

Exponenciální růst.

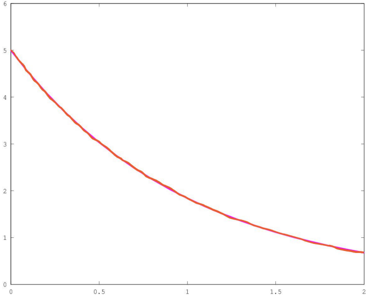


$$x'(t) = r \cdot x(t)$$
$$x(0) = x_0$$
$$\implies \quad x(t) = x_0 \exp(rt)$$



Obrázek:
růst vědeckých časopisů
na úsvitu novověku

Varianta: exponenciální pokles



$$x'(t) = -h \cdot x(t)$$
$$x(0) = x_0$$
$$\implies x(t) = x_0 \exp(-ht)$$

Pozn. Střední očekávaná délka života: $\frac{1}{h}$

v čase t až $t + dt$ uhyne ...... $e^{-ht} - e^{h(t+dt)} = -\mathrm{d}e^{-ht}$

do průměru přičteme ...... $-\mathrm{d}e^{-ht} \cdot t$

celkový průměr je „součet“ $\displaystyle\int_0^\infty -\mathrm{d}e^{-ht} \cdot t = \int_0^\infty e^{-ht} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{h}$

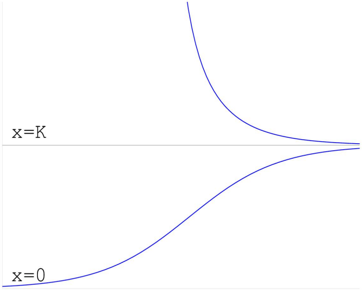
Základní model – shrnutí.

$$x'(t) = a \cdot x(t)$$

kde mohou nastat tyto situace:

$$a > 0 \ldots \text{růst populace}$$
$$a < 0 \ldots \text{úbytek populace}$$
$$a = 0 \ldots \text{stacionární stav}$$

Logistický (Verhulstův) model



$$x'(t) = r\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \cdot x(t)$$

r ... přirozená míra růstu

K ... kapacita prostředí

G.F. Gause:
The struggle for existence.
(1934)

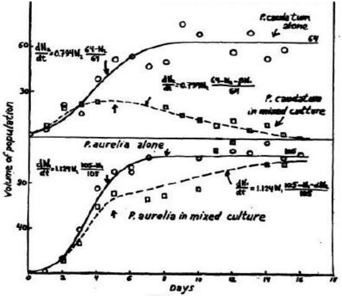
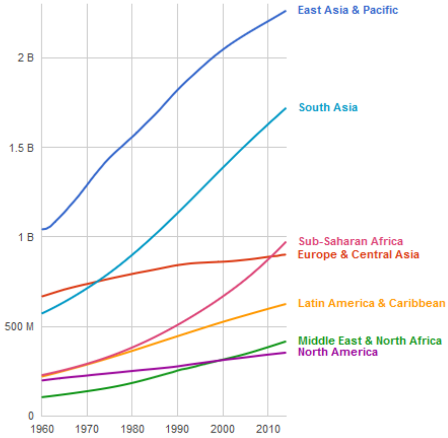
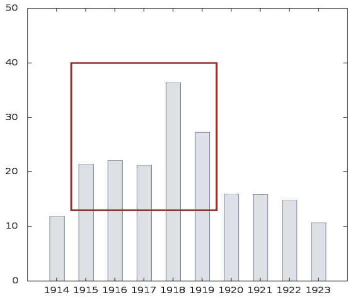


FIG. 1



Obrázek: Zalidnění kontinentů 1960-2010

d'Anconův problém



Umberto d'Ancona:

nárůst **podílu** žraloků
Středozemní moře
1915-19

$\Longrightarrow$ problém vzájemné dynamiky „dravec-kořist“

Vito Volterra

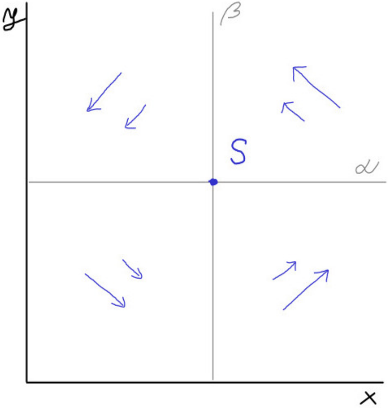
Lotka-Volterrův model

$$x = x(t) \ldots\ldots \text{sledi (kořist)}$$
$$y = y(t) \ldots\ldots \text{ žraloci (dravec)}$$

$$x'(t) = a \cdot x(t) \qquad \text{kde} \qquad a = r - k \cdot y(t)$$
$$y'(t) = b \cdot y(t) \qquad \text{kde} \qquad b = -h + p \cdot x(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &= \big(r - k \cdot y(t)\big) \cdot x(t) \\ y'(t) &= \big(-h + p \cdot x(t)\big) \cdot y(t) \end{aligned}}$$

parametry modelu: $\ldots r, h, k, p > 0$



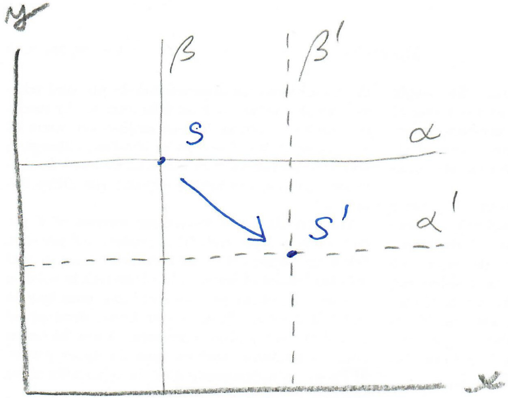
$$x'(t) = \big(r - k \cdot y(t)\big) \cdot x(t)$$
$$y'(t) = \big(-h + p \cdot x(t)\big) \cdot y(t)$$

podmínky stacionarity:

$$(\alpha): \quad y = \frac{r}{k} \qquad (\beta): \quad x = \frac{h}{p}$$

Co když se prostředí *jako celek zhorší*?

h . . . roste
r . . . klesá
$\Longrightarrow$
(α) : $y = r/k$
. . . posun dolů
(β) : $x = h/p$
. . . posun vpravo



Volterrův princip

V systémech s negativní zpětnou vazbou (typu „dravec-kořist“) vede **zhoršení prostředí** k relativnímu **poklesu počtu dravců** a k relativnímu **nárůstu počtu kořisti.**

Lotka-Volterrův model je příliš jednoduchý . . .

Holling-Tannerův model

$$x'(t) = \left(r\big(1 - \frac{x(t)}{K}\big) - \frac{m \cdot y(t)}{A + x(t)} \right) \cdot x(t)$$

$$y'(t) = s \left(1 - \frac{Py(t)}{x(t)} \right) \cdot y(t)$$

Komentář:

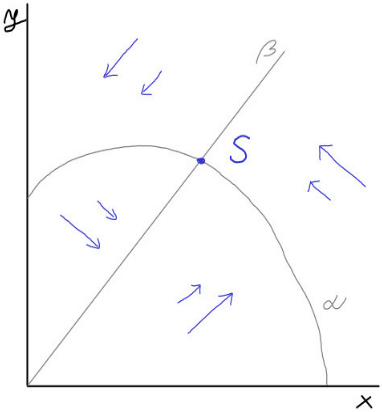
$r\big(1 - \frac{x(t)}{K}\big)$ .... logistický model

$-\frac{m \cdot y(t)}{A + x(t)}$ ....lov s nasycením dravce

$s\big(1 - \frac{y(t)}{x(t)/P}\big) \cdot y(t)$ ....„logistický model" – kapacita $x(t)/P$

P ... spotřeba kořisti na 1 predátora

Holling-Tannerův model – analýza

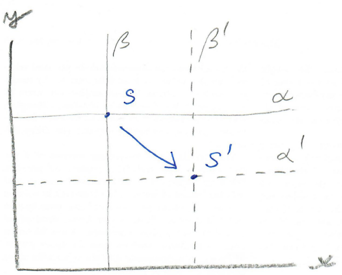


$$(\alpha): y = \frac{r}{m}\left(1 - \frac{x}{K}\right)\left(A + x\right)$$

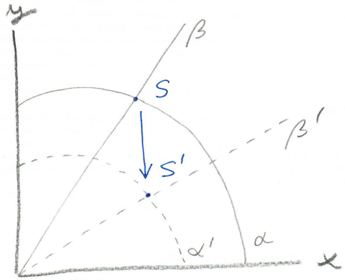
$$(\beta): y = \frac{x}{P}$$

Volterrův princip . . . platí i zde!
celkové zhoršení prostředí $\implies P \nearrow \implies y/x = 1/P \searrow$

Volterrův princip – obecné pochopení?



Obrázek: Lotka-Volterra



Obrázek: Holling-Tanner