4. TERMÍN – 28.6.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [12b] Nechť f je 2π-periodická funkce, splňující

$$f(x) = 2\sin^2(a|x|), \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Předpokládejte pro jednoduchost, že $a > 0$ a $2a \notin \mathbb{Z}$.
(a) Najděte Fourierovy koeficienty funkce f.
(b) Čemu se rovná součet příslušné Fourierovy řady? Nakreslete graf; podrobně odůvodněte – zejména vypočtěte derivaci funkce f a vyšetřete její spojitost.
(c) Napište Parsevalovu rovnost – nejprve obecně a potom vyčíslete její části v tomto konkrétním případě.
(d) Napište vzoreček pro integrování Fourierovy řady člen po členu – nejprve obecně; pak vyčíslete podrobně jednotlivé členy. Omezte se na $x \in [-\pi, \pi]$.

---

10 **2.** ~~[12b]~~ (a) Nalezněte funkci $f(z)$ takovou, že

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{13 + 12\cos x} dx$$

je roven integrálu $f(z)$ podél (kladně orientované) jednotkové kružnice v komplexní rovině.
(b) Určete singularity a jejich typ.
(c) Vypočítejte výše uvedený integrál pomocí reziduové věty.

---

10 **3.** ~~[8b]~~ Je dána funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{(1 - \cos z)^2}.$$

(a) Jaký typ singularity má funkce f v bodě 0? Zdůvodněte.
(b) Najděte alespoň dva nenulové členy příslušného Laurentova rozvoje.
(c) Najděte všechny ostatní singularity (tedy kromě „zjevných“ v bodě $z = 2k\pi$) a vypočtěte příslušná rezidua.

1. příklad [12b]

[4] ... Fourierovy koeficienty

[3] ... součet F.ř. (spojitost derivace = 2 body)

[2] ... Parseval

[3] ... integrace člen po členu

---

2. příklad [10b]

[2] ... sestavení funkce f(z)

[2] ... singularity a jejich typy

[2+3] ... rezidua: správná metoda + výpočet

[1] ... dosazení - numericky správný výsledek

---

3. příklad [10b]

[2] ... typ singularity (+ zdůvodnění)

[2] ... rozvoj pro jmenovatele

[3] ... rozvoj pro funkci f(z)

[2+1] ... proč nejsou jiné singularity + reziduum nulové (perioda!)

1) $f(x) = 2\sin^2 a|x|$; $\quad a>0$, $2a \notin \mathbb{Z}$. ; $\quad x \in (-\pi, \pi)$.

$= 1-\cos 2a|x| = 1-\cos 2ax$; $\quad x \in (-\pi, \pi)$.

sudá: $b_k = 0$; $\quad k = 1, 2, \dots$

$$\frac{\pi}{2} a_0 = \int_0^{\pi} 1-\cos 2ax = \left[x - \frac{1}{2a}\sin 2ax\right]_0^{\pi} = \pi - \frac{\sin 2\pi a}{2a}.$$

$$a_0 = 2 - \frac{\sin 2\pi a}{\pi a}.$$

$$\frac{\pi}{2} a_k = \int_0^{\pi} (1-\cos 2ax)\cos kx \, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos 2ax \cdot \cos kx \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[\cos(2a+k)x + \cos(2a-k)x\right] dx$$

$\cos\alpha \cos\beta$

$= \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$.

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2a+k)x}{2a+k} + \frac{\sin(2a-k)x}{2a-k}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2a\pi + k\pi)}{2a+k} + \frac{\sin(2a\pi - k\pi)}{2a-k}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{2} \cdot \sin(2a\pi) \cdot \frac{4a}{4a^2-k^2} ; \quad a_k = \frac{(-1)^k 4a \sin(2a\pi)}{(k^2-4a^2)\pi}.$$

$$F_f(x) = 1 - \frac{\sin 2\pi a}{2\pi a} + \frac{4a\sin(2a\pi)}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2 - 4a^2}$$

$f(x)$ spojité : v $(-\pi, \pi)$ .. jasné

$$\lim_{x\to -\pi+} f(x) = 2\sin^2 a\pi = \lim_{x \to \pi-} f(x).$$

$$f'(x) = (1-\cos 2ax)' = 2a \sin 2ax$$

spojité v $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{x \to \pm\pi \mp} f'(x) = \pm 2a \sin 2a\pi \in \mathbb{R}.$$

Věta 21.2: $f(x) = F_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

speciálně: $x \in [-\pi, \pi]$:

$$1 - \cos 2ax = 1 - \frac{\sin 2\pi a}{2\pi a} + \frac{4a \sin 2\pi a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2 - 4a^2}$$

$x = 0$: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 4a^2} = \left(\frac{\sin 2\pi a}{2\pi a} - 1 \right) \cdot \frac{\pi}{4a \sin 2\pi a}$$ o.k.

$x = \pi$: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 4a^2} = \left(\frac{\sin 2\pi a}{2\pi a} - \cos 2\pi a \right) \cdot \frac{\pi}{4a \sin 2\pi a}$$ o.k.

Parseval: $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 .$$

LS: $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2ax)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-2\cos 2ax + \cos^2 2ax)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{x}_{} - \frac{\sin 2ax}{a} + \underbrace{\tfrac{1}{2}x}_{} + \frac{\sin 4ax}{8a}\Big]_0^{\pi}$$

$$\cos^2 2ax = \tfrac{1}{2}(1+\cos 4ax) = \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4ax}{4a}\right)'$$

$$= 3 - \frac{2\sin 2a\pi}{a\pi} + \frac{\sin 4a\pi}{4a\pi} .$$

DS: $$\left(2 - \frac{\sin 2\pi a}{\pi a}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16a^2\sin^2(2a\pi)}{(k^2-4a^2)^2\pi^2} .$$

Integrace:
$$\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx\right]$$

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

pak: $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (1-\cos 2at)\,dt = \left[t - \frac{\sin 2at}{2a}\right]_0^x$$

$$= x - \frac{\sin 2ax}{2a};$$

$b_k = 0 \to A_0 = 0$. $\frac{a_0}{2}x = x - \frac{\sin 2\pi a}{2\pi a}x$

celkem:

$$-\frac{\sin 2ax}{2a} + \frac{\sin 2\pi a}{2\pi a}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a\sin(2a\pi)}{k(k^2-4a^2)}\cdot(-1)^k \sin kx$$

(2)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{13+12\cos x}\,dx = \int_\varphi f(z)\,dz; \quad \varphi = e^{it}; \ t \in [0, 2\pi].$$

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}{13+12\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{z^2}{z^2}$$

$$= \frac{1}{4i} \cdot \frac{(z^2+1)^2}{6z^2+13z+6} \cdot \frac{1}{z^2}.$$

szig: $z=0$: 2. rendű pól

$6z^2+13z+6=0 \qquad D = 169-144 = 25$

$$z_{1,2} = \frac{-13\pm 5}{12} = \begin{cases} -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \notin \operatorname{int}\varphi \\ \frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \in \operatorname{int}\varphi. \end{cases}$$

$$I = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_{-\frac{2}{3}} f(z) \right).$$

---

ad $z=0$: $\quad f(z) = \frac{1}{z^2} h(z); \quad h(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4i\,(6z^2+13z+6)} \in \mathcal{H}(K(0)).$

$$\operatorname{res}_0 f(z) = h'(0) = \frac{1}{4i} \cdot \frac{1}{(6z^2+13z+6)^2} \cdot \Big[4z(z^2+1)(6z^2+13z+6) - (z^2+1)^2(12z+13) \Big] \Big|_{z=0} = \frac{13i}{144}.$$

o.k.

ad $z_1 = -\frac{2}{3}$: $\quad f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; $\quad g(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4iz^2} \in \mathcal{H}(U(z_1))$

$h(z) = 6z^2 + 13z + 6$

$\in \mathcal{H}(U(z_1))$

$h(z_1) = 0$

$h'(z_1) \neq 0.$

$$\operatorname{res}_{-\frac{2}{3}} f(z) = \frac{g(-2/3)}{h'(-2/3)} = \frac{(z^2+1)^2}{4iz^2} \cdot \frac{1}{12z+13}\Bigg|_{z=-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{169i}{720}.$$

---

also: $I = 2\pi i \cdot \left(\frac{13i}{144} - \frac{169i}{720}\right) = \frac{13\pi}{45}$ o.K. (2×).

③ $\frac{\sin z}{(\cos z-1)^2}$; 3-ről:

$$\cos z = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)-1=0 \quad ; \quad 2e^{iz}$$

$$e^{2iz}-2e^{iz}-1=0 \quad ; \quad w=e^{iz}$$

$$w^2-2w+1=0$$

$$(w-1)^2=0$$

$$w=1: \quad e^{iz}=1=e^{0}$$

$$iz = 2k\pi i + 0$$

$$\boxed{z=2k\pi}$$

$$\cos z-1 = -\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}$$

$$(\cos z-1)^2 = \left(-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}+O(z^8)\right)\cdot\left(-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}+O(z^8)\right)$$

$$= \frac{1}{4}z^4 + z^6\left(2\left(-\frac{1}{24\cdot 2}\right)\right)+z^8\left(\frac{1}{24^2}+2\left(\frac{1}{2\cdot 720}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}z^4-\frac{1}{24}z^6+z^8\cdot\frac{1}{320}+O(z^{10})$$

o.k.

$f(z) \sim \frac{z}{z^4} \sim \frac{1}{z^3}$; $z \to 0$: 3. násobný pól.

lichá fce : $a_{2k} = 0$; $k \in \mathbb{Z}$.

$$f(z) = Az^{-3} + Bz^{-1} + Cz + Dz^3 + O(z^5)$$

$$f(z) \cdot (1-\cos z)^2 = \sin z$$

$$\left(Az^{-3} + Bz^{-1} + Cz + Dz^3 + O(z^5)\right)$$

$$\times \left(\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{24}z^6 + \frac{1}{320}z^8 + O(z^{10})\right)$$

$$= z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + O(z^7)$$

---

z^1 : $A \cdot \frac{1}{4} = 1$; $A = 4$.

z^3 : $\underset{\overset{\parallel}{4}}{A} \cdot \left(-\frac{1}{24}\right) + B \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$

$B = 0$.

z^5 : $A \cdot \frac{1}{320} - \frac{B}{24} + \frac{C}{4} = \frac{1}{120}$

$$C = 4\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{80}\right) = -\frac{1}{60}$$

$$f(z) = \frac{4}{z^3} - \frac{z}{60} + O(z^3) \quad \text{o.k.}$$