23. Komplexní analýza

$\mathbb{C} = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ $\quad i \dots$ imaginární jednotka, $i^2 = -1$

$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z$

$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$\bar{z} = x - iy$

$z\bar{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$(\mathbb{C}, |\cdot|) \cong (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$

$\quad \hookrightarrow$ eukleidovská norma

$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Def: $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

uzavřená / otevřená Gaussova rovina

$z_n \to z_0$ v $\mathbb{C}$: $|z_n - z_0| \to 0$

$z_n \to \infty$ v $\mathbb{S}$: $|z_n| \to \infty$

Pozn. $(-1)^n \cdot n \dots$ nemá limitu z hlediska $\mathbb{R}^*$

$\to \infty$ ve smyslu $\mathbb{S}$

$\frac{a}{0} := \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

okolí bodu: $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \varepsilon\}$

$U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}$

$P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$

$\to$ limita, spojitost, otevřená množina

$a \pm \infty = \infty \quad \forall a \in \mathbb{C}$

$a \cdot \infty = \infty \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$a / \infty = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$

$a / 0 = \infty \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

aritmetika limit: $z_n \to a \ ,\ w_n \to b \quad (\in \mathbb{S})$

$\Rightarrow z_n \pm w_n \to a \pm b$

spec.: $z_n \to 0 \Rightarrow$ $\qquad z_n \cdot w_n \to a \cdot b$

$\Rightarrow \frac{1}{z_n} \to \infty$ (bez dalších předpokladů) $\qquad$ má-li PS smysl

Příklady funkcí: ① polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$; $a_k \in \mathbb{C}$

② racionální funkce $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, P, Q polynomy

... funkce z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$ $\quad P(\infty) = \infty$

spojité! $\quad R(z_0) = \infty$ pokud $Q(z_0) = 0$

③ $$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

konv. abs. $\forall z \in \mathbb{C}$

platí vztahy:

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

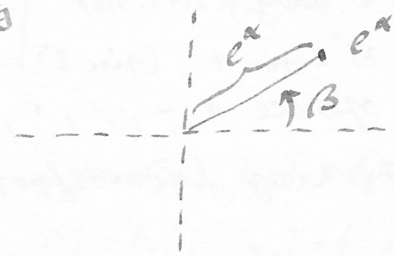
$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a [\cos b + i \sin b] \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \cos z &= \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z &= \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

Poznámka: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $e^{\alpha + i\beta} = \underset{(0,\infty)}{\underset{\rotatebox{90}{$\in$}}{e^{\alpha}}} \underbrace{[\cos\beta + i \sin\beta]}_{|\ | = 1}$

geometricky



Def. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definuji

$\log z = \{ \xi \in \mathbb{C} ; e^{\xi} = z \}$

$\arg z = \{ \beta \in \mathbb{R} ; z = |z| \cdot e^{i\beta} \}$

Pozn. $\xi = \alpha + i\beta \in \log z$

$z = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta}$, $\quad |z| = e^{\alpha} \iff \alpha = \ln|z|$

$\operatorname{Im} \xi = \beta \in \arg z$, $\quad \ln = (\exp|_{\mathbb{R}})_{-1}$

Def.: Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z): U(z_0) \to \mathbb{C}$ definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Limitu chápu pomocí okolí v $\mathbb{C}$ a musí být vlastní

ekvivalentně: $f'(z_0) = A \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$;

kde $r(h) = o(|h|)$; $h \to 0$

značíme: $f^{(1)}(z) = f'(z)$; $f^{(0)}(z) = f(z)$

indukcí: $f^{(n)}(z) = \left(f^{(n-1)}(z)\right)'$

Věta 23.1. Platí (1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$

(2) $(f \cdot g)'(z) = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z)$

(3) $(f/g)'(z) = \frac{1}{g^2(z)} \left[f'(z) g(z) - f(z) g'(z) \right]$

(4) $(f_{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f_{-1}(w))}$

(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

Úmluva: Ω je nadále vždy otevřená část $\mathbb{C}$

Def: Funkce $f(z): \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v Ω, pokud $\exists f'(z)$ pro $\forall z \in \Omega$. Značíme $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$

Přík.: ① polynom $P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

② rac. fce $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathcal{H}\left(\{z \in \mathbb{C};\ Q(z) \neq 0\}\right)$

③ e^z, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

(derivace mocn. řady, V.11.4.)

$(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$

④ Věta 23.1. $\Rightarrow$ operace $+, -, /, \cdot, \circ, -1$ zachovávají holomorfnost (na příslušném def. oboru)

Pozn.: $f(z): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\qquad$ $\underset{\sim}{F} = (F_1, F_2): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$z \mapsto f(z)$ $\qquad$ $(x, y) \mapsto \left(F_1(x,y), F_2(x,y)\right)$

Přík.: $z \to z^2$

$(x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2$ $\qquad$ $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$

$= x^2 - y^2 + i(2xy)$

Opakování : $\underset{\sim}{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; totální ~~y~~ diferenciál $d\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x_0}) = A$
v bodě $\underset{\sim}{x_0} \in \mathbb{R}^n$

A ... lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pro které

$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x_0} + \underset{\sim}{h}) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x_0}) + A\underset{\sim}{h} + o(\|\underset{\sim}{h}\|)$; $\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}$

nutně

$A = \nabla \underset{\sim}{F}(x_0)$

Věta 23.2 [Cauchy-Riemannovy podmínky]

Nechť $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$

Nechť $\underset{\sim}{F} = (F_1, F_2) : U((x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^2$

je stejná funkce ve smyslu ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$,

kde $z_0 = x_0 + iy_0$ (viz předchozí Pozn.)

Potom je ekvivalentní

(1) $\exists f'(z_0)$ (derivace podle komplexní proměnné)

(2) $\exists d\underset{\sim}{F}(x_0, y_0)$ a navíc platí

C.R. $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{\partial F_2}{\partial y}$ $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ pro $(x, y) = (x_0, y_0)$

Dále platí

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - i\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + i\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$$

DK : (1) ⇒ (2) $f'(z_0) = A$

$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$; $r(h) = o(|h|)$, $h \to 0$

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1 + iA_2 \\ h &= h_1 + ih_2 \\ r &= r_1 + ir_2 \end{aligned}\right\} \quad Ah = A_1h_1 - A_2h_2 + i(A_1h_2 + A_2h_1)$$

$$F_1(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = F_1(x_0, y_0) + A_1h_1 - A_2h_2 + r_1(h_1, h_2)$$
$$F_2(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = F_2(x_0, y_0) + A_2h_1 + A_1h_2 + r_2(h_1, h_2)$$

$|r_1|, |r_2| \le |r| = o(\underbrace{|h|}_{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2} = \|(h_1, h_2)\|})$; $h \to 0$ v $\mathbb{C}$

$\to r_1, r_2 = o(\|(h_1, h_2)\|)$; $(h_1, h_2) \to (0, 0)$ v $\mathbb{R}^2$

$\exists\, dF_1(x_0, y_0)$ ... repr. maticí $(A_1, -A_2)$

$\exists\, dF_2(x_0, y_0)$ ... repr. maticí (A_2, A_1)

celkem:

$d\underset{\sim}{F}(x_0,y_0)$ ... určen maticí $\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$

(2) => (1) nechť $\exists\, d\underset{\sim}{F}(x_0,y_0)$ a platí C.R.

označ $A_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\quad A_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0,y_0)$

$\rightsquigarrow \nabla\underset{\sim}{F}(x_0,y_0)$ má tvar (*) viz výše

$\rightsquigarrow$ úvaha se opakuje pozpátku

Pozn.: C.R. => $\nabla F_1 \perp \nabla F_2$

Věta 23.3. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, navíc $f'(z) \neq 0 \;\forall\, z \in \Omega$

Potom se křivky $\{Re\, f = konst\}$ a $\{Im\, f = konst\}$ protínají pod pravým úhlem

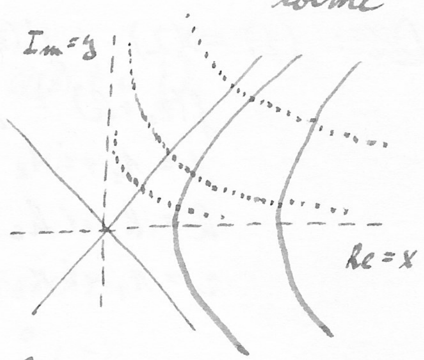
DK

$f \ldots \underset{\sim}{F} = (F_1, F_2)$ $\qquad Re\, f = F_1 = konst.$: tečna kolmá na $\nabla F_1 \neq 0$

$\qquad\qquad Im\, f = F_2 = konst.$: tečna kolmá na $\nabla F_2 \neq 0$

$f \in \mathcal{H}$: -> C.R. podm: $\nabla F_1 \perp \nabla F_2$ všude $\longrightarrow$ tečny vzájemně kolmé

Příkl. ① $f(z) = z^2$: $\underline{F_1 = x^2 - y^2}$, $F_2 = 2xy$



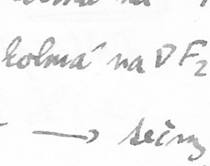
② $f(z) = e^z$: $F_1 = e^x \cos y$, $F_2 = e^x \sin y$

Opakování: mocninná řada (*) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$; $\left.\begin{matrix} a_k \text{ ... koef.} \\ z_0 \text{ ... střed} \end{matrix}\right\} \in \mathbb{C}$

$\exists!\, R \in [0,\infty]$ „poloměr konvergence"

* konverguje abs. pokud $|z-z_0| < R$

diverguje pokud $|z-z_0| > R$



Dále: je-li $R > 0$; označ $f(z)$ součet (*)

-> $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (z-z_0)^{k-1} \;\forall\, z \in U(z_0,R)$

$\hookrightarrow$ týž poloměr konvergence R

=> $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0,R))$

Def. Nechť $z_0, a_k \in \mathbb{C}$

Řada (1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ se nazývá Laurentova řada o středu z_0.

Jde o součet (2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ a (3) $\sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} (z-z_0)^{-l}$,

které se nazývají regulární a hlavní část řady (1).

Řekneme, že (1) konverguje (absolutně konv.), mají-li obě řady (2), (3) tuto vlastnost.

Pozn. ① zobecnění mocninné řady

② úmluva: $a^0 = 1$, $\forall a \in \mathbb{C}$

③ (3) a potažmo (1) nemá smysl pro $z = z_0$

Značení: $z_0 \in \mathbb{C}$; $0 \le r < R \le \infty$

mezikruží $P(z_0; r; R) := \{ z \in \mathbb{C};\ r < |z-z_0| < R \}$

Věta 23.4. [Konvergence Laurentovy řady]

Je dána řada (1).

Pak $\exists!\ r, R \in [0,\infty]$ tak, že

(i) R je poloměr konvergence regulární části (2)

(ii) hlavní část konverguje pro $|z-z_0| > r$

a diverguje pro $|z-z_0| < r$

je-li $r < R$, pak (1) konv. abs. v $P(z_0, r, R)$,

její součet je zde holomorfní a lze derivovat člen po členu

Dk (i) viz předchozí opakování (rovněž kap. 11)

(ii) označ $w := \frac{1}{z-z_0}$ ... (3) $= \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} w^l$ ... mocninná řada

$\exists!\ \rho \in [0,\infty]$ ... poloměr konvergence

označ $r = \frac{1}{\rho}$ (úmluva $\frac{1}{0} = \infty$)

$\Rightarrow$ (ii) $|w| < \rho \Leftrightarrow |z-z_0| > r$

$|w| > \rho \Leftrightarrow |z-z_0| < r$

? derivace $h(z)$ (součet (3) pro $|z-z_0| > r$)

označ $g(w)$ ... součet (*) pro $|w| < \rho$; víme: $g'(w) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}\, l\, w^{l-1}$

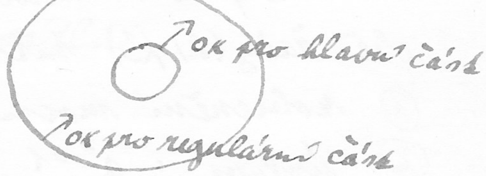
$h(z) = g\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, $h'(z) = g'\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{z-z_0}\right)' = \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}\, l \cdot (z-z_0)^{1-l} \cdot \frac{(-1)}{(z-z_0)^2}$

$$h'(z) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} \cdot l \cdot (z-z_0)^{1-l} \frac{-1}{(z-z_0)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} \cdot (-l) \cdot (z-z_0)^{-l-1}$$

pro $(-l = k)$: $\quad = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \cdot k \, (z-z_0)^{k-1}$

derivace (3) člen po členu

Poznámka : $P(z_0; r; R)$ ... mezikruží konvergence L. řady (1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$



Platí opačné tvrzení: každá $f(z) \in H(P(z_0, r, R))$ je zde součtem jednoznačně určené Laurentovy řady

Def $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená

Křivkou v Ω rozumíme $\varphi(t) : [a,b] \to \Omega$

φ spojitá, po částech C^1, $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečné výjimky

$\langle \varphi \rangle$ ... geometrický obraz křivky $= \{ \varphi(t) ; t \in [a,b] \}$

uzavřená křivka : $\varphi(a) = \varphi(b)$ (p.b. = k.b.)

jednoduchá křivka : φ prosté na $[a,b]$

jednoduchá uzavřená : $\varphi(a) = \varphi(b)$, φ prosté na $[a,b)$

Poznámka :

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{C}$
parametrizace kř.	křivka (φ ne prosté)
křivka	geom. obraz křivky

Def φ křivka, $f(z) : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$

Křivkový integrál $\quad \int_{\varphi} f(z)\,dz := \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

délka $\quad L(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$

Poznámka : $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$; $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, g(t)\,dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\, g(t)\,dt$

teoreticky Lebesgue, prakticky $\int_a^b g(t) = [G(t)]_a^b$, $G'(t) = g(t)$

lehce se ověří (d.cv.) $g, h : [a,b] \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b g(t) + h(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \int_a^b h(t)\,dt \; ; \quad \int_a^b c\, g(t)\,dt = c \int_a^b g(t)\,dt$$

Lemma 23.1. Nechť $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$
Pak $\underbrace{\left| \int_a^b g(t)\,dt \right|}_{I \in \mathbb{C}} \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$

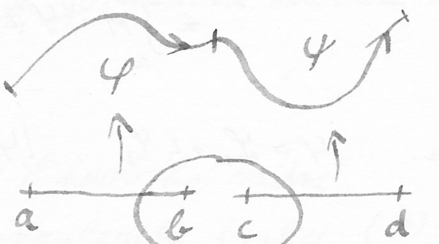
DK: $I = 0 \ldots OK$
$I \neq 0 : |I| = \underbrace{\frac{|I|}{I}}_{=c} I \quad ; \quad |c| = 1 = \left| \frac{|I|}{I} \right| = \frac{|I|}{|I|}$

tedy: $|I| = cI = c \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b c\, g(t)\,dt =$

$= \int_a^b Re(cg) + i \underbrace{\int_a^b Im(cg)}_{=0 \,;\, |I| \in \mathbb{R}} \leq \int_a^b |Re(cg)|$ *

* $|Re(cg)| \leq |cg| = |c| \cdot |g| = |g|$

Def $\varphi(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka, definuji $\dot{-}\varphi = \chi$ (opačná kř.)
kde $\chi(t) = \varphi(-t) \; ; \; t \in [-b,-a]$
Jsou-li $\varphi(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\psi(t) : [c,d] \to \mathbb{C}$ křivky splňující
k.b. φ = p.b. ψ, definujeme
$\varphi \dot{+} \psi = \chi$ (součet kř.), kde $\chi(t) := \begin{cases} \varphi(t) \,; & t \in [a,b] \\ \psi(t+b-c) \,; & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$



Věta 23.5. [Vlastnosti křivk. integrálu v $\mathbb{C}$]
Nechť φ, ψ jsou křivky v Ω, $f(z), g(z) : \Omega \to \mathbb{C}$
Potom:
1. $\int_\varphi [f(z) + g(z)]\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\varphi g(z)\,dz$
2. $\int_\varphi c f(z)\,dz = c \int_\varphi f(z)\,dz$
3. je-li k.b.φ = p.b.ψ, $\int_{\varphi \dot{+} \psi} f(z)\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\psi f(z)\,dz$
4. $\int_{\dot{-}\varphi} f(z)\,dz = -\int_\varphi f(z)\,dz$
5. je-li $|f(z)| \leq M \;\forall z \in \langle \varphi \rangle$, $\left| \int_\varphi f(z)\,dz \right| \leq M \cdot L(\varphi)$
6. ex.-li $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$, $F'(z) = f(z)$, pak $\int_\varphi f(z)\,dz = F(\text{k.b.}\varphi) - F(\text{p.b.}\varphi)$

DK: $\varphi(t): [a,b] \to \Omega$; $\psi(t): [c,d] \to \Omega$

1. $\int_\varphi [f(z)+g(z)]\,dz = \int_a^b [f(\varphi(t))+g(\varphi(t))]\varphi'(t)\,dt =$

$$= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt + \int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\varphi g(z)\,dz$$

2. podobně (d.cv.)

3. $\chi = \varphi \dotplus \psi$; $\int f(z)\,dz = \int_a^{b+d-c} f(\chi(t))\chi'(t)\,dt =$

$$= \int_a^b + \int_b^{b+d-c} = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt + \int_b^{b+d-c} f(\psi(t+c-b))(\psi(t+c-b))'\,dt =$$

$$= I_1 + I_2$$

$I_1 = \int_\varphi f(z)\,dz$

I_2: subst. $t+c-b = \tau \in [c,d]$

$dt = d\tau$

$$I_2 = \int_c^d f(\psi(\tau))\psi'(\tau)\,d\tau = \int_\psi f(z)\,dz$$

4. podobně (d.cv.)

5. $\left|\int_\varphi f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| \overset{L23.1.}{\leq} \int_a^b \underbrace{|f(\varphi(t))\varphi'(t)|}_{|f(\varphi(t))|\cdot|\varphi'(t)|}\,dt \leq$

$$\leq \int_a^b M\cdot|\varphi'(t)|\,dt = M\,L(\varphi) \qquad \underbrace{\in\langle\varphi\rangle}_{\leq M\ \forall t}$$

Pozn. $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ $\quad |\varphi'| = |\varphi_1' + i\varphi_2'| = \sqrt{(\varphi_1')^2+(\varphi_2')^2}$

6. 1. krok: $\varphi: C^1$

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[F(\varphi(t))\right]_{t=a}^{t=b} = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)$$

$f(\varphi(t))\varphi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{d}{dt}F(\varphi(t))$ složení diferencovatelných funkcí

2. krok: φ obecná (= po částech C^1); tj. $\varphi = \varphi_1 \dotplus \dots \dotplus \varphi_n$, φ_j C^1

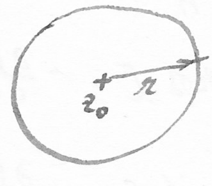
$$\int_\varphi f(z)\,dz \overset{3.}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_j} f(z)\,dz \underset{\text{krok 1}}{=} \sum_{j=1}^n \{F(k.b.\varphi_j) - F(p.b.\varphi_j)\}$$

avšak $k.b.\varphi_j = p.b.\varphi_{j+1}$

„teleskopický jev": $F(k.b.\varphi_n) - F(p.b.\varphi_1) = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)$

Příkl. (důležitý) $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$; $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\varphi \underbrace{(z-z_0)^n}_{f(z)} dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$



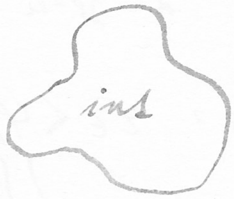
$n \neq -1$: $f(z) = F'(z)$; $F(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$; $\forall z \neq z_0$

$I = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi) = 0$

V 23.5.(6) $\quad \overset{\shortparallel}{k.b.}$

$n = -1$: (z definice) $I = \int_\varphi \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i$

Def Jordanova křivka = jednoduchá uzavřená křivka
lze psát $\mathbb{C} = \underset{\text{vnitřek}}{\operatorname{int}\varphi} \cup \langle\varphi\rangle \cup \underset{\text{vnějšek}}{\operatorname{ext}\varphi}$



Věta 23.6. [Cauchyho věta]
Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, nechť φ je Jordanova křivka v Ω, a platí $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$
Potom $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$

Pozn. Klíčový předpoklad $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega \Leftrightarrow \varphi$ neobíhá žádné singularity funkce $f(z)$
splněno vždy pro Ω jednoduše souvislou

DK: $\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$; $f = f_1 + if_2$; $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$; $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$$f(\varphi)\varphi' = [f_1(\varphi) + if_2(\varphi)][\varphi_1' + i\varphi_2'] =$$
$$= f_1(\varphi)\varphi_1' - f_2(\varphi)\varphi_2' + i(f_2(\varphi)\varphi_1' + f_1(\varphi)\varphi_2')$$

$$= \int_a^b (f_1(\varphi), -f_2(\varphi)) \cdot (\varphi_1', \varphi_2') + i\int_a^b (f_2(\varphi), f_1(\varphi)) \cdot (\varphi_1', \varphi_2')$$

viděno v $\mathbb{R}^2$: $\langle\varphi\rangle = \gamma \subset \mathbb{R}^2$ křivka
$\varphi(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrizace

$$= \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} + i\int_\gamma \underset{\sim}{G} \cdot d\underset{\sim}{s}\,; \quad \underset{\sim}{F} = (f_1, -f_2)\,; \quad \underset{\sim}{G} = (f_2, f_1)$$

Greenova věta

$$= \int_M \operatorname{rot} \underset{\sim}{F} \, d\lambda_2 + i \int_M \operatorname{rot} G \, d\lambda_2$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \underset{\sim}{F} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \operatorname{rot} \underset{\sim}{G} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{aligned}\right\} = 0 \qquad f \in \mathcal{H}$$

… Cauchy Riemannovy podm. (V. 23.2)

Lemma 23.2. [O velké půlkružnici]

Nechť $\varphi_R = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$,

Nechť $f(z)$ je spojitá na množině $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0 / |z| > R_0\}$

1. je-li $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2}$; $z \in \Omega \Rightarrow \int_{\varphi_R} f(z) dz \to 0$; $R \to \infty$

2. je-li $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|}$; $z \in \Omega \Rightarrow \int_{\varphi_R} f(z) e^{iz} dz \to 0$; $R \to \infty$

dk. 1: $z \in \langle \varphi_R \rangle \Rightarrow |z| = R$; $|f(z)| \leq \frac{K}{R^2}$; $\forall R > R_0$

$$\left| \int_{\varphi_R} f(z) dz \right| \underset{V23.5.(5)}{\leq} \frac{K}{R^2} \cdot L(\varphi_R) = \frac{\pi K}{R} \to 0; \ R \to \infty$$

2: $$I = \int_{\varphi_R} f(z) e^{iz} dz = \int_0^\pi f(Re^{it}) \cdot e^{iRe^{it}} \cdot iRe^{it} dt$$

$$|f(Re^{it})| \leq \frac{K}{|Re^{it}|} = \frac{K}{R}; \ \forall R > R_0$$

$$|iRe^{it}| = R$$

$$|e^w| = e^{\operatorname{Re} w} \Rightarrow |e^{iRe^{it}}| = |e^{iR(\cos t + i \sin t)}| = e^{-R \sin t}$$

$$|I| \underset{L23.1.}{\leq} \int_0^\pi | \quad | dt = \int_0^\pi \frac{K}{\cancel{R}} e^{-R \sin t} \cdot \cancel{R} \, dt = \int_0^\pi \underbrace{K e^{-R \sin t}}_{h(R,t)} dt$$

$t \in (0, \pi) \to \sin t > 0$: $h(R,t) \to 0$, $R \to \infty$

$\int_0^\pi h(R,t) dt \to 0$ … Lebesgue, majoranta $K \in L^1(0, \pi)$ (nezávislá na R)

Pozn. Požadavek $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^2}$; $|z| > R_0$ je splněn např. pro $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$; P, Q .. polynomy a st. $Q \geq 2 +$ st P, resp. $f(z) \leq \frac{K}{|z|}$ pro $|z| \geq R_0$ pokud st $Q \geq 1 +$ st P

Cauchyho věta: $\varphi \ldots$ Jordanova křivka (jednoduchá, uzavř.)

$f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\left(\exists f'(z) \in \mathbb{C} \ \forall z \in \Omega\right)$

Ω otevř.; $\operatorname{int} \varphi \cup \langle \varphi \rangle \subset \Omega$

(singularity mimo vnitřek φ)

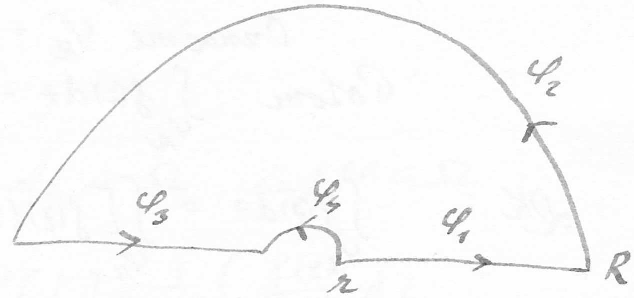
Pak $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$

$\left(\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right.$; $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka

Příkl. $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$

$\notin L^1(0,\infty)$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$



$\varphi_1 = t$; $t \in [r,R]$
$\varphi_2 = Re^{it}$; $t \in [0,\pi]$
$\varphi_3 = t$; $t \in [-R,-r]$
$\varphi_4 = re^{it}$; $t \in [0,\pi]$

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$: Věta 23.6.

$$0 = \int_\varphi f(z)\,dz = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} - \int_{\varphi_4} \quad \Big| \; \begin{array}{l} r \to 0+ \\ R \to \infty \end{array}$$

$$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} = \int_{J_{r,R}} \frac{e^{it}}{t} \cdot 1\,dt = i \int_{J_{r,R}} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$J_{R,r} = (-R,-r) \cup (r,R)$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$r \to 0+$: $\to i \int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t}\,dt$

$R \to \infty$: $\to 2iI$

Lemma 23.2.: $\varphi_R = Re^{it}$; $t \in [0,\pi]$

1. $|f(z)| \le \frac{K}{|z|^2} \Rightarrow \int_{\varphi_R} f(z)\,dz \to 0$; $R \to \infty$

2. $|f(z)| \le \frac{K}{|z|} \Rightarrow \int_{\varphi_R} e^{iz} f(z)\,dz \to 0$; $R \to \infty$

2. časť $f(z) = \frac{1}{z}$: $\varphi_2 \to 0$; $R \to \infty$

potrebujeme ještě:

Lemma 23.3. [O malé půlkružnici]

Nechť $f(z)$ je spojitá v $P(z_0)$

Nechť $f(z)(z-z_0) \to A \in \mathbb{C}$; $z \to z_0$

Označme $\varphi_r = z_0 + re^{it}$; $t \in [\alpha,\beta]$, $\alpha < \beta$

Potom $\int_{\varphi_r} f(z)\,dz \to iA(\beta-\alpha)$; $r \to 0+$

DK:
$$\int_{\varphi_r} f(z)\,dz = \int_{\varphi_r} [f(z)(z-z_0) - A + A]\frac{dz}{z-z_0} =$$
$$= \int_{\varphi_r} \frac{A}{z-z_0}\,dz + \int_{\varphi_r} \underbrace{[f(z)(z-z_0) - A]\cdot\frac{1}{z-z_0}}_{g(z)}\,dz = I_1 + I_2$$

I_1: $\int_\alpha^\beta \frac{A}{re^{it}}\cdot rie^{it}\,dt = iA(\beta-\alpha)$

z toho: tvrdím $I_2 \to 0$, $r \to 0+$, $\varepsilon > 0$ dáno:

I_2: $\exists \delta > 0$ $z \in P(z_0,\delta) \Rightarrow |f(z)(z-z_0) - A| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$

nechť $r \in (0,\delta)$: $\langle \varphi_r \rangle \subset P(z_0,\delta)$

$$|g(z)| \le \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{r}$$

V 23.5. (5): $|I_2| \le \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{r}\cdot\underbrace{L(\varphi_r)}_{2\pi r\frac{\beta-\alpha}{2\pi}} \le \varepsilon$

Pozn. Speciální případ: $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$, $g(z)$ spojitá v $U(z_0)$

$$f(z)\cdot(z-z_0) = g(z) \to g(z_0) = A;\ z \to z_0$$

Dokončení přikl. : $\int_{\varphi_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$; $\varphi_4 = re^{it}$; $t \in [0,\pi]$

L.23.3 $z_0 = 0$, $A = \lim_{z \to 0} e^{iz} = 1$, $\alpha = 0, \beta = \pi$

$\int_{\varphi_4} \to i\pi$

celkem $0 = \int_{\varphi_1} + \overset{\to 0}{\int_{\varphi_2}} + \int_{\varphi_3} + \underset{\to i\pi}{\int_{\varphi_4}} \quad \Bigg|\begin{array}{l} r \to 0+ \\ R \to \infty \end{array}$

$\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_3} \to 2iI$

tedy $I = \frac{\pi}{2}$

Věta 23.7. [Cauchyho vzorec]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$

Nechť φ je Jordanova křivka v Ω , $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$

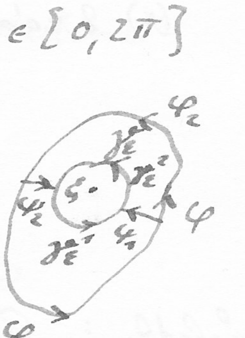
Potom

(1) $\forall \zeta \in \operatorname{int}\varphi : f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$

(2) $f(z)$ má v $\operatorname{int}\varphi$ derivace všech řádů a platí

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz ; \ \forall \zeta \in \operatorname{int}\varphi$$

dk. (1) $\zeta \in \operatorname{int}\varphi$; $\varepsilon > 0$; $\gamma_\varepsilon = \zeta + \varepsilon e^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$



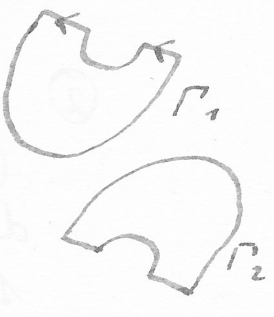
tvrdím : $\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$

$\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$, $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^1 \dotplus \gamma_\varepsilon^2$

$\Gamma_1 := \varphi_1 \dotplus \psi_1 \dot{-} \gamma_\varepsilon^1 \dot{-} \psi_2$

$\Gamma_2 := \varphi_2 \dotplus \psi_2 \dot{-} \gamma_\varepsilon^2 \dot{-} \psi_1$

$\frac{f(z)}{z-\zeta} \in \mathcal{H}(\operatorname{int}\Gamma_1), \mathcal{H}(\operatorname{int}\Gamma_2)$



V.23.6. $\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz = 0$

$$= \int_{\varphi_1} + \int_{\psi_1} - \int_{\gamma_\varepsilon^1} - \int_{\psi_2} + \int_{\varphi_2} - \int_{\gamma_\varepsilon^2} - \int_{\psi_1} + \int_{\psi_2} = \int_{\varphi} - \int_{\gamma_\varepsilon} = 0 \; ; \quad \#$$

$\varepsilon \to 0+ :$ $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\cancel{z_0}\,\xi}\, dz \to 2\pi i \cdot f(\xi)$

L.23.3. : $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$; $z_0 = \xi$

$f(z)$ ... spojitá v $z = \xi$ $\quad (\Leftarrow \exists f'(\xi))$

celkem:

$$\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} 2\pi i\, f(\xi)$$

$\forall \varepsilon$ malé

(2) formálně $f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz \overset{(*)}{=}$

(derivace dle ξ)

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}}\, dz$$

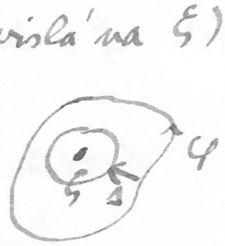
$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n (z-\xi)^{-1} = \underbrace{(-1)(-2)\cdots(-n)(-1)^n}_{n!} (z-\xi)^{-n-1}$$

(*) záměna, ověření: majoranta (nezávislá na ξ)

$|f(z)| \le K$ na $\langle \varphi \rangle$

└ spojitá na kompaktu

$|z - \xi| \ge \Delta > 0$



Důsledky: ① hodnoty f uvnitř φ jsou určeny hodnotami na $\langle \varphi \rangle$

(1) $f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz$, $\xi \in \operatorname{int} \varphi$

② holomorfní funkce je nekonečně diferencovatelná

$(\exists f'(z) \Rightarrow \exists f^{(k)}(z) \;\; \forall k = 1, 2, \dots)$

derivace v $\mathbb{C}$!, podle komplexní proměnné,

to způsobuje odlišné vlastnosti od $\mathbb{R}$

Základní věta algebry: $\forall$ polynom má kořen v $\mathbb{C}$

Lemma 23.4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (otevřená, křivkově souvislá)

Nechť $F(z): \Omega \to \mathbb{C}$ a $F'(z) = 0$ v Ω

Pak $F \equiv$ konst. v Ω

dk. $z_1, z_2 \in \Omega$ libovolné

$\exists \varphi \ldots$ křivka v Ω, p.b. $\varphi = z_1$

k.b. $\varphi = z_2$

V.23.5.(6) $F(z_2) - F(z_1) = \int_\varphi \underbrace{F'(z)}_{\equiv 0} dz = 0$

Pozn. implikace $F' = 0 \Rightarrow F =$ konst se v $\mathbb{R}$ dokazuje přes věty o střední hodnotě, které ale neplatí v $\mathbb{C}$

Příkl. $\varphi(t): [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\varphi(t) = e^{it} - 1$ $\quad \varphi \ldots$ spoj v $[0, 2\pi]$

$\exists \varphi' = ie^{it}$ v $(0, 2\pi)$

$\varphi_0 = \varphi(2\pi) = 0$

avšak: $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in (0, 2\pi)$

což je ve sporu s Rolleovou větou (která je pro $\mathbb{R}$)

Věta 23.8. [Liouvilleova]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a nechť $f(z)$ je omezená

Potom $f \equiv$ konst. v $\mathbb{C}$

dk. stačí $f' \equiv 0$ v $\mathbb{C}$ (viz L.23.4.)

$\xi \in \mathbb{C}$ lib., $\varphi = \xi + Re^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$

V.23.7.(2) $f'(\xi) = \frac{1!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-\xi)^2} dz$; $\forall R > 0$

víme: $|f(z)| \leq K \quad \forall z \in \mathbb{C}$; $|z - \xi| = R \quad z \in \langle \varphi \rangle$

$|f'(\xi)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{K}{R^2} \cdot \underbrace{L(\varphi)}_{2\pi R} = \frac{K}{R}$

$R \ldots$ libovolně velké $\Rightarrow f'(\xi) = 0$

Věta 23.9. [Základní věta algebry]

Nechť $P(z)$ je polynom, st $P \geq 1$

Pak $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) = 0$

dk. sporem: nechť $P(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

pak $f(z) := \frac{1}{P(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ $\quad f' = \frac{-P'(z)}{P(z)}$ V23.1.

tvrdím $f(z)$ je omezená v $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ jsem hotov: V.23.8. $f(z) \equiv$ konst.

$P(z) = \frac{1}{f(z)} \equiv$ konst.

spor: st $P \geq 1$

k omezenosti $f(z) = \frac{1}{P(z)}$:

důkaz sporem:

f neomezená: $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists z_n \in \mathbb{C}; |f(z_n)| > n$

a tedy $P(z_n) = \frac{1}{f(z_n)} \to 0, n \to \infty$

(i) $\{z_n\}$ omezená

$\Rightarrow \exists$ podposloupnost (stejně značená)

a bod $z_0 \in \mathbb{C}$; $z_n \to z_0$

potom $P(z_n) \to P(z_0) = 0$, SPOR

(ii) $\{z_n\}$ není omezená: $\exists$ podposl. $z_n \to \infty$

potom ale $P(z_n) \to 0$; $|z_n| \to \infty$

SPOR: $|P(z)| \sim |z|^{\text{st} P}, z \to \infty$

st. $P \geq 1$

Věta 23.10. [Existence Laurentova rozvoje]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0; r, R))$

Potom (1) $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $z \in P(z_0; r, R)$

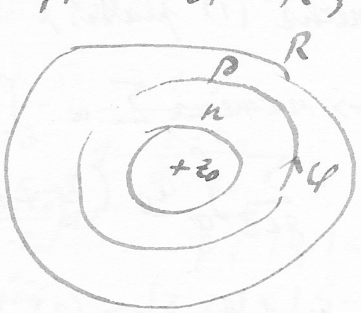
Tato řada se nazývá Laurentův rozvoj $f(z)$ o středu z_0

Konverguje absolutně stejnoměrně na $\forall M$ striktně uvnitř $P(z_0; r, R)$

Čísla a_k, Laurentovy koeficienty, jsou určena jednoznačně a platí (2) $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$; $k \in \mathbb{Z}$; $\varphi = z_0 + \rho e^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$

$\rho \in (r, R)$

$P(z_0; r, R) = \{ z \in \mathbb{C} \,; |z - z_0| > r \,, |z - z_0| < R \}$



$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell (z-z_0)^\ell = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z-z_0)^\ell}_{\text{regulární}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{-\ell} (z-z_0)^{-\ell}}_{\text{hlavní část}}$$

Def. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$ ... izolovaná singularita

$$P(z_0, \delta) = P(z_0; 0, \delta)$$

Potom koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji o středu z_0 se nazývá reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0, značíme $a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f(z)$

Věta 23.12. [Reziduová věta]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, Ω je oblast, K je konečná množina singularit

Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int} \varphi \subset \Omega$; $\langle \varphi \rangle \cap K = \emptyset$

Potom $\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\xi \in K \cap \operatorname{int}\varphi} \operatorname{res}_\xi f(z)$

stačí spočítat rezidua, není nutno počítat křivk. integrál

Důkaz věty 23.10. [Laurentův rozvoj]

(jednoznačnost a tvar a_n)

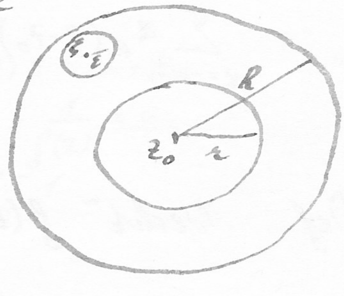
nechť (1) platí ; $\displaystyle\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int_\varphi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}}_{\text{omezené na } \langle\varphi\rangle} \underbrace{a_k (z-z_0)^k}_{\Sigma \text{ konv. stejn. na } \langle\varphi\rangle} dz$

=> záměna $\sum$ a $\int$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_\varphi a_k (z-z_0)^{k-n-1}\,dz = \begin{cases} 0 \ ; & k-n-1 \neq -1 \\ 2\pi i \ ; & k-n-1 = -1 \Leftrightarrow k = n \end{cases}$$

z toho => (2) & jednoznačnost rozvoje

zbývá: existence



$\zeta \in P(z_0, r, R)$; $\rho_1, \rho_2, \varepsilon > 0$

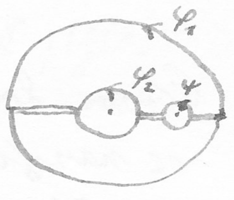
$r < \rho_1 < |z_0 - \zeta| < \rho_2 < R$

$\varphi_1 = z_0 + \rho_1 e^{it}$

$\varphi_2 = z_0 + \rho_2 e^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$\psi = \zeta + \varepsilon e^{it}$

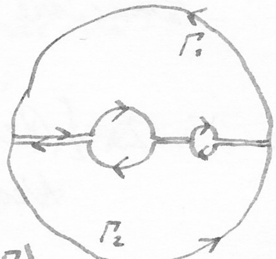
schematicky:



tvrdím:

$$f(\zeta) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\psi \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz = $$

$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i}\left(-\int_{\varphi_1} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz + \int_{\varphi_2} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz\right)$$



(*) věta 23.7. (Cauchyho vzorec)

(**) viz obrázek : $\quad \dfrac{f(z)}{z-\zeta} \in \mathcal{H}(\operatorname{int}\Gamma_1), \mathcal{H}(\operatorname{int}\Gamma_2)$

věta 23.6. (Cauchy)

$$0 = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_{\varphi_1} - \int_{\varphi_2} - \int_\psi$$

označme $\quad I_1 = -\displaystyle\int_{\varphi_1} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$

$\quad I_2 = \displaystyle\int_{\varphi_2} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$

ad I_2: trik $\quad \dfrac{1}{1-q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k$; $|q| < 1$

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}_{q \ ; \ |q|<1}}$$

$$\int_{\varphi_2} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz = \int_{\varphi_2} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f(z)}{z-z_0}}_{\text{omezené}} \underbrace{\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^k}_{\substack{\Sigma \text{ konv. stejn.} \\ \text{(vůči } z\text{)} \\ \text{Weierstrass}}} dz$$

$|\zeta - z_0| < |z - z_0|$

OK pro $z \in \langle\varphi_2\rangle$

na $\langle\varphi_2\rangle$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{\varphi_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right)}_{2\pi i a_k \,\dots\, \text{ve shodě s } (2)} (\zeta - z_0)^k$$ regulární část rozvoje ($k \geq 0$)

ad I_1: $$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{-1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}_{q\,;\; |q|<1}}$$: $|z-z_0| < |\zeta - z_0|$ OK pro $z \in \langle \varphi_1 \rangle$

$$-I_1 = -\int_{\varphi_1} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = \int_{\varphi_1} \sum_{k=0}^{\infty} f(z) \cdot (\zeta - z_0)^{-1} \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0} \right)^k dz$$

konv. stejn. vůči $z \in \langle \varphi_1 \rangle$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{\varphi_1} f(z) \cdot (z-z_0)^k dz \right)}_{\text{označ } 2\pi i a_{-k-1}} \cdot (\zeta - z_0)^{-k-1}$$ … hlavní část rozvoje ($k \leq -1$)

shrnutí: $$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}(I_2 - I_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\zeta - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k-1} (\zeta - z_0)^{-k-1}$$

a_k … určené vzorcem (2)

stejnoměrná konvergence:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \quad ; \quad |f(z)| \leq K \text{ na } \varphi$$

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} K \rho^{-k-1} \cdot 2\pi\rho = K \rho^{-k}$$

$$z \in M : |z-z_0| \leq q\rho \; ; \; q \in (0,1)$$

$$|a_k (z-z_0)^k| \leq K\rho^{-k} (q\rho)^k = K q^k \; ; \; \sum q^k \text{ konv.}$$

Weierstrass: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ konv. stejn. vůči $z \in M$

Věta 23.11. [Taylorův rozvoj]

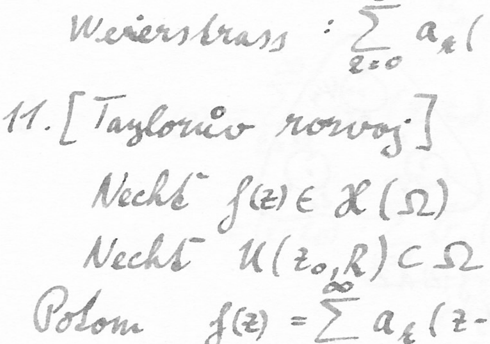
Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$

Nechť $U(z_0, R) \subset \Omega$

Potom $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, $z \in U(z_0,R)$ a navíc

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

Dk:



$\zeta \in U(z_0, R)$; $\varphi_2 = z_0 + \rho_2 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

V.23.7 : $f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz \overset{(*)}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (\zeta - z_0)^\ell$

(*) předchozí důkaz (**) V 23.7. (Cauchyho vzorec)

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{\ell+1}} \overset{(**)}{=} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(z_0)$$

Def. [Reziduum - opakování]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0,\delta))$ ... izolovaná singularita

V.23.10. $\to \exists!\, a_\ell \in \mathbb{C}$;

$$f(z) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} a_\ell (z-z_0)^\ell; \quad z \in P(z_0,\delta)$$

$$a_\ell = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{\ell+1}};\quad \ell \in \mathbb{Z};$$ φ... lib. kružnice kolem z_0

Speciálně : $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi f(z)\, dz$: reziduum fce $f(z)$ v bodě z_0

značíme $a_{-1} = \mathrm{res}_{z_0} f(z)$

Věta 23.12. [Reziduová věta]

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$,

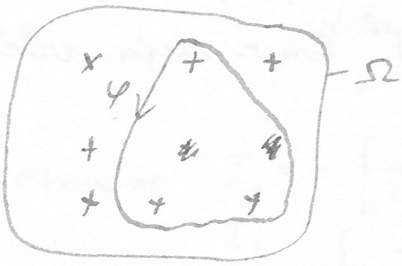
K ... konečná množina singularit

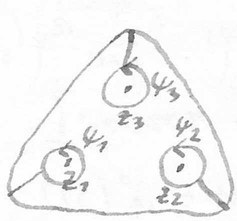
φ... kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω,

$\mathrm{int}\,\varphi \subset \Omega$, $\langle\varphi\rangle \cap K = \emptyset$

Potom $\int_\varphi f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\xi \in K \cap \mathrm{int}\,\varphi} \mathrm{res}_\xi f(z)$

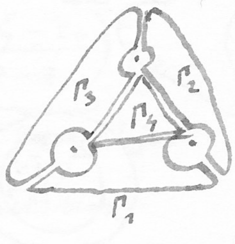
dk.





tvrdím : $\int_\varphi f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\varphi_j} f(z)\, dz$

$\Rightarrow$ jsem hotov : $\int_{\varphi_j} f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{res}_{z_j} f(z)$



$f(z) \in \mathcal{H}(\operatorname{int} \Gamma_k)$; $k = 1, \dots, 4$

V.23.6. : $0 = \sum_{k=1}^{4} \int_{\Gamma_k} = \int_{\varphi} - \sum_{j=1}^{3} \int_{\psi_j}$

Věta 23.13. [Výpočet rezidua]

1. Nechť $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$; $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0,\delta))$, $n \in N$

   Potom $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \dfrac{1}{(n-1)!} \, g^{(n-1)}(z_0)$

2. Nechť $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$; $g(z), h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0,\delta))$

   $\cancel{g(z_0)}$ $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$

   Potom $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

3. Nechť $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$; $g(z), h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0,\delta))$

   Nechť $h(z_0) = h'(z_0) = \dots = h^{(k-1)}(z_0) = 0$, $h^{(k)}(z_0) \neq 0$

   Potom $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}$

Dk. 1. $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$; $z \in U(z_0,\delta)$; $a_k = \frac{1}{k!} g^{(k)}(z_0)$

díky V.23.11.

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n}$

koeficient u $(z-z_0)^{-1}$: $\cancel{\alpha_{n-1}}$ $a_{n-1} =$

$a_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)!} \, g^{(n-1)}(z_0)$

2. $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$; $b_0 = h(z_0) = 0$, $b_1 = h'(z_0) \neq 0$

$= (z-z_0) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-1}}_{H(z) \in \mathcal{H}(U(z_0,\delta))}$: stejný poloměr konvergence (zkuste!!)

$H(z_0) = b_1 = h'(z_0) \neq 0$

pak $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)} = \dfrac{1}{z-z_0} \cdot \underbrace{\dfrac{g(z)}{H(z)}}_{\in \mathcal{H}(U(z_0,\tilde{\delta}))}$, $z \in P(z_0,\delta)$

bod 1 : $\Rightarrow$ $\operatorname{res}_{z_0} \dfrac{f(z)}{\cancel{h(z)}} = \dfrac{g(z_0)}{H(z_0)} = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

3. $$h(z)=\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell (z-z_0)^\ell = \underbrace{b_0+b_1(z-z_0)+\dots+b_{p-1}(z-z_0)^{p-1}}_{=0}+b_p(z-z_0)^p+\dots$$

$$b_\ell=\frac{1}{\ell!}h^{(\ell)}(z_0)=0\ ;\ \ell<p$$

$$b_p\neq 0\ ;\ b_p=\frac{1}{p!}h^{(p)}(z_0)$$

$$h(z)=(z-z_0)^p \underbrace{\sum_{\ell=p}^{\infty} b_\ell (z-z_0)^{\ell-p}}_{\substack{H(z)\in \mathcal{H}(z_0,\delta)\\ H(z_0)=b_p\neq 0}}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^p}\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right)\in \mathcal{H}(U(z_0,\tilde{\delta}))$$

bod 1: $\operatorname{res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{(p-1)!}\left[\underbrace{\frac{g(z)}{H(z)}}_{\text{holomorfní} \Rightarrow \text{nekonečně hladká}}\right]^{(p-1)}_{z=z_0}$

$$\Rightarrow \left[\frac{g(z)}{H(z)}\right]^{(p-1)}_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(z)}{H(z)}\right]^{(p-1)}=\lim_{z\to z_0}\Big[(z-z_0)^p\underbrace{\frac{g(z)}{h(z)}}_{f(z)}\Big]^{(p-1)}$$

$$H(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^p}\ ;\ z\in P(z_0)$$

Poznámka [l'Hospital v $\mathbb{C}$]

Nechť $f(z), g(z)\in \mathcal{H}(U(z_0,\delta))$, nechť $f(z_0)=g(z_0)=0$

Potom $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$, má-li PS smysl

Def. Nechť $f(z)\in\mathcal{H}(P(z_0,\delta))$, „izolovaná singularita"

nechť $f(z)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell (z-z_0)^\ell$ je příslušný Laurentův rozvoj

($\exists!$ dle věty 23.10.). Bod z_0 se nazývá:

(i) odstranitelná singularita, je-li $a_\ell=0\ \forall \ell<0$

(ii) pól násobnosti $p\in\mathbb{N}$, je-li $a_{-p}\neq 0$, $a_\ell=0\ \forall \ell<-p$

(iii) podstatná singularita, je-li $a_\ell\neq 0$ pro nekonečně indexů $\ell<0$

$$f(z)=\dots+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots$$

Příkl. ① $\frac{\sin z}{z} \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(0,\delta))$; $\delta > 0$ lib.

$\qquad = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \quad \forall z \neq 0$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}$

odstranitelná singularita v bodě $z_0 = 0$

② $\frac{\cos z}{z^2} \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(0,\delta))$

$= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \dots$

pól násobnosti 2 v $z_0 = 0$

③ $\exp\left(\frac{1}{z}\right) \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(0,\delta))$

$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \dots + \frac{1}{k!\, z^k} + \dots$

podstatná singularita v $z_0 = 0$

Věta 23.14. [Charakterisace odstranitelné singularity]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(z_0,\delta))$. Potom je ekvivalentní:

(1) $f(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu

(2) $\exists\, g(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0,\delta))$ tak, že $f(z) = g(z)$ v $\mathcal{P}(z_0,\delta)$

(3) $f(z)$ je omezená v jistém $\mathcal{P}(z_0,\delta')$

Dk. (1) ⇒ (2) $\forall z \in \mathcal{P}(z_0,\delta)$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k =: g(z)$$

$g(z)$: mocn. řada, konv. $\forall z \in \mathcal{P}(z_0,\delta)$

⇒ poloměr konv. $\geq \delta$, $g(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z_0,\delta))$

(2) ⇒ (3) $g(z)$ spojitá v bodě z_0 ($\exists$ konečná derivace)

⇒ $g(z)$ omezená na $\mathcal{U}(z_0,\delta')$

⇒ $f(z) = g(z)$ omezená na $\mathcal{P}(z_0,\delta')$

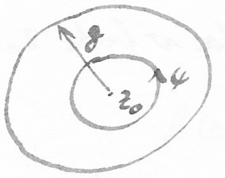
(3) ⇒ (1) $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$; $\forall z \in \mathcal{P}(z_0,\delta)$

víme: $|f(z)| \leq K$; $z \in \mathcal{P}(z_0,\delta')$

cíl: $a_k = 0 \quad \forall k < 0$

věta 23.10. $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\psi f(z)(z-z_0)^{-(k+1)}\,dz$

$\psi = z_0 + \varepsilon e^{it}$; $t\in[0,2\pi]$, $\varepsilon\in(0,\delta)$ libovolné



nechť $\varepsilon\in(0,\delta')$: $z\in\langle\psi\rangle$

$|f(z)(z-z_0)^{-(k+1)}| \le K\cdot\varepsilon^{-k-1}$

$|a_k| \le \frac{1}{2\pi}\cdot K\cdot \varepsilon^{-k-1}\cdot \underbrace{L(\psi)}_{2\pi\varepsilon} = K\varepsilon^{-k}$; $\varepsilon\to 0+$ $-k>0$ pro $k<0$

$a_k = 0$

Věta 23.15. [Charakterizace pólu]

Nechť $f(z)\in\mathcal{H}(P(z_0,\delta))$

Potom je ekvivalentní:

(1) $\exists\, p\in\mathbb{N}$ tak, že $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti p

(2) $f(z)\to\infty$ pro $z\to z_0$

Dk   (1) $\Rightarrow$ (2) $f(z)=\sum_{k=-p}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$; $\forall\, z\in P(z_0,\delta)$

$$=(z-z_0)^{-p}\cdot\sum_{k=-p}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k+p} = \frac{1}{(z-z_0)^p}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k}_{F(z)}$$

$F(z)\in\mathcal{H}(U(z_0,\delta))$ ... mocn. řada, poloměr konv. $\geq\delta$

$z\to z_0$: $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^p}\cdot F(z)\to\infty\cdot\underbrace{F(z_0)}_{=a_{-p}\neq 0}=\infty$

(2) $\Rightarrow$ (1) : $\exists\,\delta'>0$; $|f(z)|>1$ $\forall\, z\in P(z_0,\delta')$

$\Rightarrow F(z) := \frac{1}{f(z)}\in\mathcal{H}(P(z_0,\delta'))$

navíc : $|F(z)|<1$ na $P(z_0,\delta')$

věta 23.14. : $\exists\, g(z)\in\mathcal{H}(z_0,\delta')$; $g(z)=F(z)$ na $P(z_0,\delta')$

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k = \sum_{k=p}^{\infty} b_k(z-z_0)^k = (z-z_0)^p\underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} b_k(z-z_0)^{k-p}}_{G(z)} \quad k-p\geq 0$$

↳ tato funkce má svůj Taylorův rozvoj

nechť $p\geq 0$ nejmenší takové, že $b_p\neq 0$

nutně $p\geq 1$: $z\to z_0$: $g(z)=\frac{1}{f(z)}\to\frac{1}{\infty}=0=b_0$

(zároveň $g\not\equiv 0$, tj. existuje takové p)

$G(z)\in\mathcal{H}(U(z_0,\delta'))$; $G(z_0)=b_p\neq 0$

$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^p}\cdot\frac{1}{G(z)}$; $G(z)\neq 0$ na $U(z_0,\delta'')$

↳ $\in\mathcal{H}(U(z_0,\delta''))$

věta 23.11. : $= \frac{1}{(z-z_0)^p} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$; $a_0 = \frac{1}{G(z_0)} \neq 0$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-p} \quad \forall z \in P(z_0, \delta'')$$

Def : Řekneme, že množina $M \subset \Omega$ je hustá v Ω, jestliže $(\forall w \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0)[M \cap U(w, \varepsilon) \neq \emptyset]$

Věta 23.16. [Charakterizace podstatné singularity]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0,\delta))$. Potom je ekvivalentní:

(1) $f(z)$ má v z_0 podstatnou singularitu

(2) pro $\forall \delta' \in (0,\delta)$ je $f(P(z_0,\delta))$ hustá množina v $\mathbb{C}$

Dk : $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$ (totéž jako $(2) \Rightarrow (1)$)

z_0 není podstatná singularita:

(a) z_0 je odstranitelná singularita

V.23.14. $\exists \delta'$; $\exists K > 0$: $|f(z)| \leq K \quad \forall z \in P(z_0, \delta')$

$\rightarrow f(P(z_0,\delta'))$ není hustá v $\mathbb{C}$

neprotne $U(K+1, 1/2)$

(b) z_0 je pól:

V. 23.15. $\exists \delta' > 0 \quad |f(z)| > 1 \quad \forall z \in P(z_0, \delta')$

$\rightarrow f(P(z_0,\delta'))$ není hustá v $\mathbb{C}$

neprotne $U(0, 1/2)$

$\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$ (jako $(1) \Rightarrow (2)$)

nechť $\exists \delta' > 0$; $M := f(P(z_0,\delta'))$ není hustá v $\mathbb{C}$

tj: $\exists w \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0 : M \cap U(w,\varepsilon) \neq \emptyset$

neboli $|f(z) - w| \geq \varepsilon \quad \forall z \in P(z_0, \delta')$

polož $g(z) := \frac{1}{f(z)-w} \in \mathcal{H}(P(z_0,\delta'))$; navíc $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$

V.23.14. : $g(z)$ má odstranitelnou singularitu v z_0

spec. $g(z) \rightarrow A \in \mathbb{C}$; $z \rightarrow z_0$

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} \quad ; \forall z \in P(z_0, \delta'')$$

$z \rightarrow z_0$: (a) $A \neq 0$: $f(z) \rightarrow w + \frac{1}{A} \in \mathbb{C}$

$\rightarrow f$ omezená na $P(z_0,\delta'') \Rightarrow f$ má odstranitelnou singularitu

(b) $A = 0$; $f(z) \to w + \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow f$ má pól

celkem : není neodstranitelná singularita

Def: z_0 se nazve hromadný bod množiny M, jestliže $(\forall \delta > 0)[P(z_0,\delta) \cap M \neq \emptyset]$

ekvivalentně : $\exists\, z_n \in M$; $z_n \to z_0$ avšak $z_n \neq z_0 \ \forall n$

značení : $\operatorname{der} M$ ... hromadné body M

Příklady ① $\operatorname{der} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

② K konečná $\Rightarrow \operatorname{der} K = \emptyset$

③ $M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $\operatorname{der} M = \{0\}$

Lemma 23.5. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0,R))$, nechť $z_0 \in \operatorname{der} N$,
$N = \{\zeta ; f(\zeta) = 0\}$

Potom $f(z) \equiv 0$ na $U(z_0,R)$

dk. V. 23.11.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \forall z \in U(z_0,R)$$

sporem : nechť $f(z) \not\equiv 0$: $\exists\, p \geq 0$; $a_p \neq 0$, BÚNO nejmenší takové

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^p \cdot \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-p}}_{=:\, g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0,R))}$$

$g(z_0) = a_p \neq 0$

$\exists\, \delta > 0$; $g(z) \neq 0$ na $U(z_0,\delta)$

nechť $z \in P(z_0,\delta)$: $f(z) = \underbrace{(z-z_0)^p}_{\neq 0} \cdot \underbrace{g(z)}_{\neq 0} \neq 0$

tj: $P(z_0,\delta) \cap N = \emptyset$ spor.

Věta 23.17. [O jednoznačnosti]

Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, souvislá množina

Nechť $N = \{\zeta \in \Omega ; f(\zeta) = 0\}$ má v Ω hromadný bod.

Potom $f(z) \equiv 0$ v Ω

DK volme $z_0 \in \Omega \cap \operatorname{der} N$

$R > 0$ maximální takové, že $U(z_0,R) \subset \Omega$

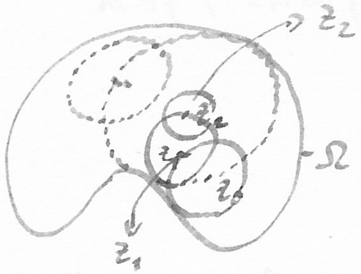
L. 23.5. $\Rightarrow$ $f(z) \equiv 0$ na $U(z_0,R)$

~~$z_1 \in \Omega_*$~~

$z_1 \in \Omega \cap \partial U(z_0,R)$ libovolné

pozoruji $z_1 \in \operatorname{der} N$

opakuji předchozí úvahu $\Rightarrow N = \Omega$



Důsledek: Nechť $f_1(z), f_2(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $f_1(x) = f_2(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Potom $f_1(z) = f_2(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$

DK: $\Omega = \mathbb{C}$; $f := f_1 - f_2$

V.23.17: $N = \{z \in \mathbb{C}, f = 0\} \supset \mathbb{R}$

$\emptyset \neq \operatorname{der} N \supset \mathbb{R} \Rightarrow f \equiv 0$ v $\mathbb{C}$