Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte všechny použité výpočty.

---

1. [8b] Je dána řada

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}}{\ln k}\right).$$

(a) rozhodněte, zda řada konverguje
(b) rozhodněte, zda řada absolutně konverguje

Návod: $\lim_{y\to 0} \operatorname{arctg}(y)/y = 1$.

---

2. [8b] Je dána rovnice:

$$2\sqrt{xy} - y = -xy'.$$

(a) pro která x, y má rovnice smysl ?
(b) nalezněte obecné řešení
(c) nalezněte tři různá maximální řešení, splňující $y(1) = 0$.

Návod: řešte zvlášť pro $x > 0$ a $x < 0$. Pozor: $\sqrt{x^2} = -x$ pokud $x < 0$.

---

3. [8b] Je dána funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^3-y^3}}.$$

(a) zdůvodněte podrobně, že f je definována na jistém okolí bodu $(x,y) = (0,0)$
(b) vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
(c) vypočítejte obecnou směrovou derivaci $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}(0,0)$, kde $\boldsymbol{w} = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ je daný vektor
(d) rozhodněte, zda existuje $df(0,0)$

Návod: derivace nutno počítat z definice.

---

4. [8b] (a) Dokažte ověřením předpokladů věty o implicitních funkcích, že rovnice

$$x^2 + y^2 + z^3 = 0$$
$$x + y + z^2 = 2$$

určují v okolí bodu $(x,y,z) = (1,0,-1)$ nekonečně hladké funkce $Y = Y(x)$ a $Z = Z(x)$.
(b) spočítejte $Y'(1)$, $Z'(1)$
(c) spočítejte $Z''(1)$

① $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}}{\ln k}\right)$ [8b]

(a) konvergence ~ Leibniz ?

$$a_k := \underbrace{\frac{1}{\ln k}}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}\right)}_{\to 0} \to 0$$ [1]

$\operatorname{arctg} a_k \to \operatorname{arctg} 0 = 0.$ [1]

---

monotonie: $\operatorname{arctg} x$ je monotónní v $\mathbb{R}$;
stačí mo. $\{a_k\}$.

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right); \quad x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x}\left(\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)\ln x - \underbrace{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x^3}}_{>0}\left(\underbrace{(-2+x)}_{>0}\ln x \underbrace{-1+x}_{>0}\right) \quad \text{pro } x>2$$

$\Rightarrow f(x)$ rostoucí [2]

$\Rightarrow \{a_k\}$ rostoucí

Závěr: konverguje dle Leibnize...

(b) absolutní konvergence ?

$$\left|(-1)^k \operatorname{arctg}\left(\underbrace{\frac{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}}{\ln k}}_{<0\,!!}\right)\right| = \operatorname{arctg}\left(\underbrace{\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}{\ln k}}_{b_k}\right)$$

[1]

víme: $b_k \to 0$; $b_k \neq 0$.

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1 \; ;$$

tedy: $\operatorname{arctg} b_k \sim b_k$;

řada konv. abs. $\Leftrightarrow \sum b_k$ konv.

$$b_k = \frac{1}{k \ln k} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{k}\right)}_{\to 1} \sim \frac{1}{k \ln k} \; ;$$

[1]

$\sum \frac{1}{k \ln k}$ -- diverguje

$\Leftarrow$ integrální kritérium

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{c} \ln x = y \\ \frac{dx}{x} = dy \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dy}{y} = \Big[\ln y\Big]_{\ln 2}^{\infty} = \infty .$$

[2]

[8b]

(2) $2\sqrt{xy} - y = -xy'$

(i) $y \equiv 0\ ;\ x \in \mathbb{R}$ je řešení [1]

(ii) $x, y > 0$: subst.: $y' = xz' + z$, $y = xz$ (tedy $z > 0$...)

$$2\sqrt{x^2 z} - \cancel{xz} = -x(xz' + \cancel{z})$$

$$2x\sqrt{z} = -x^2 z'$$

$$-\frac{1}{x} = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$C - \ln x = \sqrt{z}$; $\sqrt{z} > 0$: $C > \ln x$ [1]

$x \in (0, e^C)$

$$z = (C - \ln x)^2$$

$y = x(C - \ln x)^2$; $x \in (0, e^C)$ [2]

(iii) $x, y < 0$: stejně jako výše; $z = \frac{y}{x} > 0$

lec pozor: $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ pro $x < 0$.

$$2\sqrt{x^2 z} = -x^2 z'$$

$$-2x\sqrt{z} = -x^2 z'$$

$$\frac{1}{x} = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$C + \ln|x| = \sqrt{z}$: $\sqrt{z} > 0$: $\ln|x| > -C$

$-x = |x| > e^{-C}$

$$z = (C + \ln|x|)^2$$

$y = x(C + \ln|x|)^2$; $x \in (-\infty, -e^{-C})$. $x < -e^{-C}$ [2]

(iv) 1. $y \equiv 0$

2. $y(x) = x \ln^2 x \; ; \; x \in (0,1)$ -- $c = 0$.

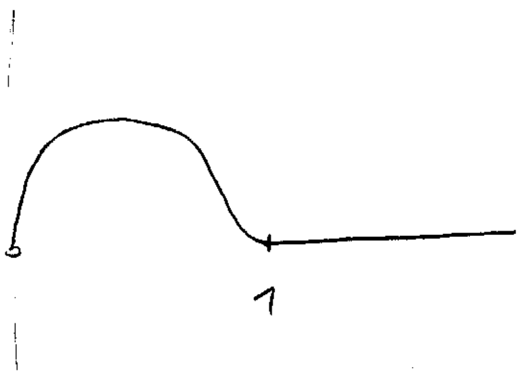
? prodloužení $\quad y(1) = 0$

$$y'(1) = (\ln^2 x) + x \, 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 0.$$

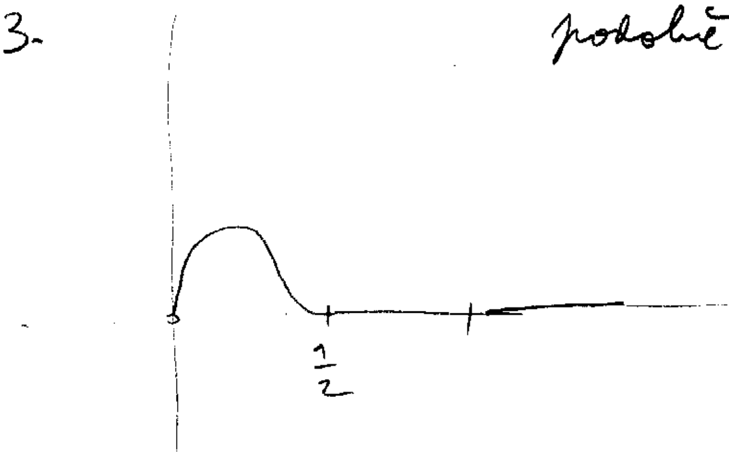
$y(0+) = 0 \quad$ (x silnější než $\underline{\ln}$)

$$y'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \ln^2 x = \underline{\underline{+\infty}}$$

nelze prodloužit za $x = 0$



3. podobně; např.:



$$y(x) = \begin{cases} x \left(\ln x - \ln \frac{1}{2} \right)^2 ; & x < \frac{1}{2} \\ 0 \; ; & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[2]

Bernoulli:

$2\sqrt{x}\sqrt{y} - y = -xy'$ $\qquad y = z^{1/2}$ ⊛

$2\sqrt{x} - \sqrt{y} = -x y' y^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad y' = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} z$

$\sqrt{x} - \frac{z}{2} = -x z'$ $\qquad z = y^{1/2} (>0).$

$\qquad z' = \frac{1}{2} y' y^{-\frac{1}{2}}$

$x z' - \frac{z}{2} = -\sqrt{x}$

ř.: $y = x(c-\ln x)^2$

$y' = (c-\ln x)^2 - 2(c-\ln x)$

L.S. $2x(c-\ln x) - x(c-\ln x)^2$

P.S. $+2x(c-\ln x) - x(c-\ln x)^2$ o.k.

$xy' - y = -2\sqrt{x}\sqrt{y}$ $\qquad x>0$

$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{\sqrt{x}}\sqrt{y}$; $\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2x} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad z = y^{\frac{1}{2}}$

$z' - \frac{z}{2x} = -2x^{-\frac{1}{2}}$; $\qquad \int -\frac{dx}{2x} = -\frac{1}{2}\ln x$

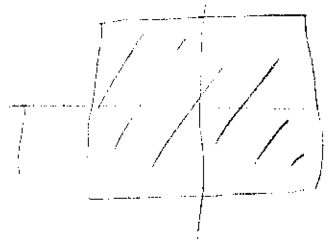
$z' x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} z = -\frac{1}{x}$ $\qquad$ i.f.: $x^{-\frac{1}{2}}$

$(z x^{-\frac{1}{2}})' =$

$z x^{-\frac{1}{2}} = c - \ln x$ $\qquad z = x(c-\ln x)^2$

3 $\quad f(x,y) = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x^3-y^3}}$

(i)



$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$1 \neq \sqrt[3]{x^3-y^3}$$

$$1 \neq x^3-y^3 \quad \dots \quad \text{platí pro} \quad |x|^3 < \tfrac{1}{2}$$

$$|y|^3 < \tfrac{1}{2}$$

[1]

(ii) $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\left[f(t,0) - f(0,0)\right]$

$$\frac{1}{t}\cdot\left[\frac{1}{1-\underbrace{\sqrt[3]{t^3}}_{=t}} - 1\right] = \frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{t}\left[1-(1-t)\right]$$

$$= \frac{1}{1-t} \to \underline{\underline{1}}.$$

analogicky: $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \underline{\underline{-1}}$ [1]

obecně: $\quad w = (u,v) \in R^2$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(tu,tv) - f(0,0)\right]$$

$$\dots \quad \frac{1}{t}\left[\frac{1}{1-t\sqrt[3]{u^3-v^3}} - 1\right] \dots \to \sqrt[3]{u^3-v^3}.$$ [1]

(iii) pokud existuje $df(0,0)$; je nutně $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = df(0,0)[w]$

a tedy $w \longmapsto \frac{\partial f}{\partial w}(0,0)$ je lineární.

– což zde zjevně neplatí; tedy $\nexists\, df(0,0)$.

~ jiný argument (z definice).

kandidát: $(u,v) \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) \cdot u + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot v = u - v.$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \Big[f(u,v) - f(0,0) - (u-v) \Big] = 0 \quad ? \qquad [2]$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \left[\frac{1}{1-\sqrt[3]{u^3-v^3}} - 1 - (u-v) \right]$$

– k vyvrácení limity stačí volit nějaký směr; třeba: $\boxed{\begin{matrix} u=t \\ v=2t \end{matrix}}$; $t \to 0+$

($u=v=t$ by zde nepomohlo!).

$$\frac{1}{t\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1-t\sqrt[3]{-7}} - 1 - t(-1) \right]$$

$$= \frac{1}{t\sqrt{5}} \cdot \frac{-t\sqrt[3]{7}}{1+t\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \longrightarrow \frac{1-\sqrt[3]{7}}{\sqrt{5}} \neq 0. \qquad [3]$$

(4) $x^2+y^2+z^3=0$ $\qquad (x,y,z)=(1,0,-1)$ [8b]

$x+y+z^2=2$ $\qquad y=Y(x)$

$z=Z(x).$

$F_1 = x^2+y^2+z^3$

$F_2 = x+y+z^2-2$

(i) $F_{1,2}$ .. hladké (polynomy)

(ii) $F_1(1,0,-1) = F_2(1,0,-1) = 0$ [1]

(iii) „klíčový předpoklad": $\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,0,-1)}$ regulární!

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y, & 3z^2 \\ 1, & 2z \end{pmatrix} \text{ .. dosazení: } \begin{pmatrix} 0, & +3 \\ 1, & -2 \end{pmatrix} \quad \text{o.k.}$$

[2]

VIF: $\exists\, \delta, \Delta$; $\exists\, C^\infty$ fce $Y(x): \mathcal{U}(1,\delta) \to \mathcal{U}(0,\Delta)$

$Z(x): \mathcal{U}(1,\delta) \to \mathcal{U}(-1,\Delta)$

tak, že $(x,y,z) \in \mathcal{U}(1,\delta) \times \mathcal{U}(0,\Delta) \times \mathcal{U}(-1,\Delta)$

platí $F_1 = F_2 = 0 \iff y = Y(x)$

$z = Z(x)$;

speciálně víme: $Y(1)=0$

$Z(1)=-1$.

$x^2 + Y^2(x) + Z^3(x) = 0 \qquad x \in \mathcal{U}(1,\delta)$

$x + Y(x) + Z^2(x) = 2$

$\frac{d}{dx}$: $2x + 2Y'Y + 3Z'Z^2 = 0$

$1 + Y' + 2ZZ' = 0$ [1]

---

dosadit: $x = 1$; $Y(1) = 0$; $Z(1) = -1$.

$2 + 3Z'(1) = 0 \qquad Z'(1) = -2/3$

$1 + Y'(1) - 2Z'(1) = 0 \qquad Y'(1) = -7/3$ [2]

---

druhé derivace:

$2 + 2Y''Y + 2(Y')^2 + 3Z''Z^2 + 6(Z')^2 = 0$

$Y'' + 2(Z')^2 + 2Z''Z = 0$

---

dosazení:
(1. rce)

$2 + 2\cdot\frac{49}{9} + 3\cdot Z''(1) + 6\cdot\frac{4}{9} = 0$

$-3Z''(1) = \frac{1}{9}\left(24 + 98 + 18\right) = \frac{240}{9} = \frac{80}{3}$

$Z''(1) = \frac{-80}{9}$. [2]