14. Funkce více proměnných.

V této kapitole studujeme funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, které lze chápat také jako M-tice funkcí

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_M)$$

kde každá f_j má N proměnných:

$$f_j = f_j(x_1, \dots, x_N)\,.$$

Vektory značíme tučně $\boldsymbol{x}$, jejich složky x_i. V $\mathbb{R}^N$ uvažujeme implicitně eukleidovskou normu

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}\,,$$

a tudíž je to metrický prostor s metrikou $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.
Z předchozí kapitoly víme, co znamená okolí v $\mathbb{R}^N$, a tedy limita, spojitost takových funkcí. Nyní se zaměříme především na jejich diferencovatelnost.

Příklady. ① Každá lineární funkce $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je spojitá, ztotožňujeme ji přirozeně s maticí $\mathbb{R}^{M\times N}$ ② Každý polynom $p(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce

Definice. Je dána $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Parciální derivací f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle x_i rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})\big]\,,$$

kde $\boldsymbol{e}^i$ je vektor s 1 na i-té pozici a nulami jinde. Obecněji, definujeme derivaci ve směru $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ jako

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})\big]\,.$$

Poznámky.
• parciální derivace: derivuje podle jedné proměnné, ostatní jsou pevné – v podstatě situace minulého semestru
• parciální derivace je speciální případ derivace ve směru: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}^i}$

Definice. Gradientem funkce $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ rozumíme matici $N \times N$

$$\nabla \boldsymbol{f} = \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_{j=1,\dots M;\ i=1,\dots N}\,.$$

Poznámka. Parciální derivace je nedostatečný pojem: existuje funkce, jež má parciální derivace nulové, a přesto je (v daném bodě) nespojitá. Existuje dokonce funkce, která má všechny směrové derivace nulové, a pořád je nespojitá. Potřebujeme lepší (silnější) pojem derivace.

Definice. Je dána $\boldsymbol{f} : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Totálním diferenciálem funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, splňující

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})\big] = \boldsymbol{0}\,.$$

Značíme $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = L$.

Poznámky.
• ekvivalentně:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + L(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{h})\,,$$

kde $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{h}) = o(\|\boldsymbol{h}\|)$ pro $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.
• je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak $f'(a) = A \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{|t|}\big[f(a+t) - f(a) - At\big] = 0\,.$$

Věta 14.1 Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$ totální diferenciál. Potom
(1) $\boldsymbol{f}$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá
(2) pro každé $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ existuje směrová derivace $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ a rovná se $[d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})](\boldsymbol{v})$

Důsledek. Jestliže $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ existuje, je určen jednoznačně, a je reprezentován maticí $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, přesněji vzato zobrazením

$$\boldsymbol{h} \mapsto \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \bullet \boldsymbol{h}^T\,, \tag{1}$$

kde $\bullet$ značí maticový součin.

Věta 14.2 Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom
(1) Jsou-li $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}$ omezené na nějakém $U(\boldsymbol{a}, \delta)$, je $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá
(2) Jsou-li $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}$ spojité v bodě $\boldsymbol{a}$, má zde $\boldsymbol{f}$ totální diferenciál

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená. Potom $\boldsymbol{f} \in C(\Omega)$ značí, že $\boldsymbol{f}$ je spojitá (což je právě když všechny složky f_i jsou spojité). Dále $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$ značí, že $\boldsymbol{f}$ a všechny její parciální derivace jsou spojité.
Proč nejraději funkce na otevřených množinách? Každý bod obsahuje i okolí – není problém počítat parciální derivace atd.

Věta 14.3 (1) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mají totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom $f + g$ má totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$d(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})\,.$$

(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K$ mají totální diferenciál v bodech $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, respektive $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Potom složené zobrazení $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ má totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$d(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) \circ d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,.$$

Důsledek. Za předpokladu předchozí věty platí

$$\nabla(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = \nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) \bullet \nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,,$$

(kde $\bullet$ značí maticový součin), po složkách zapsáno

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\big(g_l(\boldsymbol{f})\big)(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\boldsymbol{b})\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\,.$$

(tzv. ,,řetízkové pravidlo“).

Definice. Pro $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$ definujeme otevřenou úsečku

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \big\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a});\ t \in (0,1)\big\}$$

a uzavřenou úsečku

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \big\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a});\ t \in [0,1]\big\}\,.$$

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazve konvexní, jestliže $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \Omega$ implikuje $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \Omega$.

Věta 14.4 [O střední hodnotě.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, konvexní, nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je třídy C^1. Potom pro libovolné $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \Omega$ existuje $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \rangle\,.$$

Definice. Parciální derivace vyšších řádů definuji takto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\,,$$

obecně

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}\,, \qquad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$$

vznikne postupnou aplikací $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}$.

Funkce třídy C^k je taková, že všechny parciální derivace až do řádu k jsou spojité.

Poznámka. Závisí na pořadí parciálních derivací? Obecně ano: definujme

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & |y| > |x|, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, zatímco $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Je-li však funkce dost hladká, na pořadí nezáleží – viz následující věta.

Věta 14.5 Nechť $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na nějakém $U(\boldsymbol{a})$. Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a})\,.$$

Důsledek. Je-li funkce třídy C^k, pak hodnoty libovolné parciální derivace stupně (nejvýše) k nezávisí na pořadí derivování.

Poznámky. [Geometrický význam gradientu]. Je-li $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ třídy C^1, potom pro směrovou derivaci platí:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \langle \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle\,.$$

To je nula, pokud $\boldsymbol{v} \perp \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ (tj. $\boldsymbol{v}$ je směr vrstevnice), a nabývá maximální hodnoty (při $\|\boldsymbol{v}\| = 1$), pokud $\boldsymbol{v}$ je násobkem $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ (tj. $\boldsymbol{v}$ je směr spádnice).

Definice. Rovnicí ve tvaru totálního diferenciálu rozumíme

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{R}$$

kde $M(x,y), N(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina.

Poznámky.
• nepřesně řečeno: řešením (R) jsou křivky, jejichž tečný vektor (dx, dy) je kolmý na (M, N).

• rovnice (R) je souhrnné vyjádření dvou (za jistých předpokladů ekvivalentních) rovnic:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{OD.1}$$

pro neznámou funkci $y = y(x)$, nebo

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \tag{OD.2}$$

pro neznámou funkci $x = x(y)$.

• Vyřešením rovnice (R) rozumíme nalezení funkce (tzv. potenciálu) $V(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že $\nabla V = (M, N)$.
Přesněji vzato jsou řešením vrstevnice V, tj. křivky, implicitně zadané podmínkou $V(x,y) = c$.

Definice. Rovnice (R) se nazve exaktní, pokud M, N jsou C^1 a platí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Poznámky.
• pokud existuje $V \in C^2$ tak, že $\nabla V = (M, N)$, je (R) nutně exaktní.
• platí i obráceně: je-li (R) exaktní, a jsme-li na ,,rozumné" množině Ω (například konvexní), potom existuje $V \in C^2$ tak, že $\nabla V = (M, N)$.

Lemma 14.1. Nechť $V = V(x,y)$ je C^1 na okolí bodu (x_0, y_0) taková, že $\nabla V = (M, N)$, a nechť $N(x_0, y_0) \neq 0$. Potom pro funkci $y(x) \in C^1(U(x_0))$, splňující $y(x_0) = y_0$ je ekvivalentní:
(1) funkce $y(x)$ řeší rovnici (OD.1) na okolí bodu x_0.
(2) funkce $y(x)$ splňuje na okolí x_0 rovnici $V(x, y(x)) = c$, kde $c = V(x_0, y_0)$.
Opakování. Taylorův rozvoj funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ –

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + \frac{1}{2!}\varphi''(a)t^2 + R_3(h)\,,$$

kde $R_3(h) = \frac{1}{3!}\varphi'''(\theta)h^3$ pro vhodné θ ležící mezi a a $a+h$.

Věta 14.6 [Taylorův rozvoj v $\mathbb{R}^N$] Nechť $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$ je C^3, kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom pro každé $\boldsymbol{h} \in U(\boldsymbol{a})$ existuje $\boldsymbol{\theta} \in (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$ takové, že

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})h_i h_j + R_3(\boldsymbol{h})\,,$$

kde

$$R_3(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{\theta})h_i h_j h_k\,.$$

Definice. Multiindexem nazýváme n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$ nazýváme výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}\,.$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^N$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} .$$

Je-li $n = |\alpha|$, definuji zobecněné kombinační číslo

$$\binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} ;$$

– to vyjadřuje, kolika způsoby lze n prvků rozdělit do N skupin, jestliže j-tá skupina obsahuje právě α_j členů.

Příklady. Nechť $\alpha = (1, 0, 2)$. Potom

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3^2} , \qquad x^\alpha = x_1 x_3^2 .$$

Poznámky. Pomocí multiindexů můžeme elegantně zapisovat různé složité výrazy. Platí například multinomická věta (zobecnění binomické věty):

$$(h_1 + \dots h_N)^n = \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} \boldsymbol{h}^\alpha .$$

Druhý člen Taylorova rozvoje lze napsat takto:

$$\frac{1}{2!} \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} D^\alpha f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{h}^\alpha .$$

Zbytek můžeme napsat takto:

$$\frac{1}{3!} \sum_{|\alpha|=3} \binom{3}{\alpha} D^\alpha f(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{h}^\alpha .$$

Obecný tvar (rozvoj m-tého řádu) vypadá takto:

$$f(\boldsymbol{a}) = \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{n!} \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} D^\alpha f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{h}^\alpha \right) + R_{m+1}(\boldsymbol{h}) ,$$

kde

$$\frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\alpha|=m+1} \binom{m+1}{\alpha} D^\alpha f(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{h}^\alpha .$$

Definice. Hessovou maticí funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ rozumíme

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right)_{i,j=1,\dots,N} .$$

Je to čtvercová matice, která je díky Větě 14.5 symetrická.

Definice. Funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ vzhledem k množině $M \subset \mathbb{R}^N$

- globální maximum, pokud $(\forall \boldsymbol{x} \in M)\ [f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})]$
- lokální maximum, pokud $(\exists \delta > 0)\ (\forall \boldsymbol{x} \in M \cap U(\boldsymbol{a}, \delta))\ [f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})]$
- ostré lokální maximum, pokud $(\exists \delta > 0)\ (\forall \boldsymbol{x} \in M \cap P(\boldsymbol{a}, \delta))\ [f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x})]$

Analogicky se definuje minimum.

Věta 14.7 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$ maximum vzhledem k nějakému $U(\boldsymbol{a}, \delta)$. Potom pro každé $i = 1, \dots, N$ je $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ buď rovna 0, nebo neexistuje.

Definice. Bod $\boldsymbol{a}$, ve kterém je $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, nazýváme stacionární bod.

Důsledek Věty 14.7. Je-li $\boldsymbol{a} \in M$ vnitřní bod (tj. existuje $\delta > 0$ tak, že $U(\boldsymbol{a}, \delta) \subset M$), potom f má v $\boldsymbol{a}$ extrém vůči M, pouze je-li to stacionární bod.

Opakování. Nechť $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ je symetrická matice. Kvadratickou formou, určenou touto maticí, rozumíme funkci $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definovanou jako

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} h_i h_j = \langle A\boldsymbol{h}^T, \boldsymbol{h} \rangle .$$

Forma se nazve pozitivně definitní, jestliže existuje $c_1 > 0$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{h}) \geq c_1 \|\boldsymbol{h}\|^2$ pro každé $\boldsymbol{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna kladná.
Forma se nazve negativně definitní, jestliže existuje $c_2 > 0$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{h}) \leq -c_2 \|\boldsymbol{h}\|^2$ pro každé $\boldsymbol{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna záporná.
Forma se nazve indefinitní, jestliže existují $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ tak, že $\varphi(\boldsymbol{v}) > 0$ a $\varphi(\boldsymbol{w}) > 0$. To nastává právě tehdy, A má kladná i záporná vlastní čísla.

Opakování. Z algebry víme, že symetrická matice má pouze reálná vlastní čísla, dále že odpovídající vlastní vektory tvoří ortonormální bázi, a matice je podobná diagonální matici.

K určení definitnosti matice není vždy nutné počítat charakteristický polynom. Jestliže $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ je seznam všech vlastních čísel (vícenásobná píšeme opakovaně), pak platí:

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \\ \operatorname{tr} A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \end{aligned}$$

$\operatorname{tr} A$ je stopa matice, definovaná jakožto součet diagonálních prvků. Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \det A = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \operatorname{tr} A = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že vlastní čísla jsou všechna nenulová, ze druhé pak, že aspoň jedno je kladné a aspoň jedno záporné, tedy matice je indefinitní. K určení definitnosti lze použít také Sylvestrovo pravidlo. Označme Δ_k, $k = 1, \dots N$, determinanty matic $\left\{A_{ij}\right\}_{i,j=1}^{k}$. Potom A je pozitivně definitní, právě když $\Delta_k > 0$ pro každé k, a je negativně definitní, právě když $(-1)^{k-1}\Delta_k > 0$ pro každé k.

Věta 14.8 Nechť $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$ je třídy C^3, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Nechť $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$, a označme $\varphi(\boldsymbol{h})$ kvadratickou formu, určenou Hessovou maticí f v bodě $\boldsymbol{a}$, tj.

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) h_i h_j \, .$$

Potom platí:

1. je-li $\varphi(\boldsymbol{h})$ pozitivně definitní, je $\boldsymbol{a}$ lokální minimum
2. je-li $\varphi(\boldsymbol{h})$ negativně definitní, je $\boldsymbol{a}$ lokální maximum
3. je-li $\varphi(\boldsymbol{h})$ indefinitní, není $\boldsymbol{a}$ (ani lokální) extrém

Definice. Třetí případ předchozí věty nazýváme „sedlový bod“.

Poznámka. Předchozí věta nepokrývá všechny možné případy. Je-li příslušná forma pouze semidefinitní, tj. například nezáporná, ale někde nulová, obecně nelze rozhodnout.

Srovnej případ, kdy $f'(a) = f''(a) = 0$. Potom a může a nemusí být lokální extrém (viz $f = t^3$ resp. t^4 v bodě $a = 0$.)

Věta 14.9 [Vázané extrémy – 1. verze] Nechť f, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, nechť $\boldsymbol{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N;\ g(\boldsymbol{x}) = 0\right\}.$$

Předpokládejme, že f a g jsou třídy C^1 na okolí $\boldsymbol{a}$, a že $\nabla g(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$.
Potom nutnou podmínkou toho, že $\boldsymbol{a}$ je lokální extrém f vůči M, je existence $\lambda \in \mathbb{R}$ takového, že

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{a}). \tag{2}$$

Poznámky. Číslo λ se nazývá Lagrangeův multiplikátor. Dle předchozí věty jsou z extrému podezřelé body, kde

- f, g nejsou hladké
- $\nabla g(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, což odpovídá situaci, kde množina Γ (obecně $(N-1)$-dimenzionální hladká plocha) může degenerovat
- konečně body, kde platí (2), tj. gradienty f a g jsou kolineární

Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená, právě když existuje $C > 0$ tak, že $|x_i| \leq C$ pro $i = 1, \dots, N$ a každé $\boldsymbol{x} \in M$. Množina je typicky uzavřená, je-li tvaru

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N;\ g(\boldsymbol{x}) \leq c\right\}$$

kde g je spojitá funkce (jedná se o vzor uzavřené množiny $(-\infty, c]$, viz Věta 13.5); obecněji, jde-li o průnik takovýchto množin (viz Věta 13.1').

Věta 14.10. (1) Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená a uzavřená. Potom f má globální maximum a minimum.
(2) Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = \infty$. Potom f má globální minimum (zrcadlová verze pro maximum).
(2') Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = -\infty$. Potom f má globální maximum.
(3) Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = 0$. Existuje-li $\boldsymbol{a}$ tak, že $f(\boldsymbol{a}) > 0$, pak má f globální maximum. Existuje-li $\boldsymbol{b}$ tak, že $f(\boldsymbol{b}) < 0$, pak má f globální minimum.

Poznámky. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená, právě když existuje $C > 0$ tak, že $|x_i| \leq C$ pro $i = 1, \dots, N$ a každé

Věta 14.11 [Vázané extrémy – obecná verze] Nechť f, $g_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots k$, kde $k < N$. Nechť $\boldsymbol{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N;\ g_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, \dots k\right\}.$$

Předpokládejme, že f a g_j jsou třídy C^1 na okolí $\boldsymbol{a}$, a že matice

$$\left\{\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right\}$$

má maximální hodnost, tj. k.
Potom nutnou podmínkou toho, že $\boldsymbol{a}$ je lokální extrém f vůči Γ, je existence čísel $\lambda_j \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla g(\boldsymbol{a})\,. \tag{3}$$

Věta 14.12 [O implicitní funkci – 1. verze] Nechť $F(\boldsymbol{x}, y) : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$. Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$ jsou takové, že

- $F(\boldsymbol{a}, b) = 0$
- F je C^1 na okolí $(\boldsymbol{a}, b)$.
- (klíčový předpoklad) $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{a}, b) \neq 0$

Potom existují δ, $\Delta > 0$ a C^1 funkce

$$Y(\boldsymbol{x}) : U(\boldsymbol{a}, \delta) \to U(b, \Delta)$$

tak, že pro každé $(\boldsymbol{x}, y) \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \times U(b, \Delta)$ platí

$$F(\boldsymbol{x}, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = Y(\boldsymbol{x}).$$

Navíc, je-li F třídy C^k, je též Y třídy C^k (na příslušných okolích).

Poznámka. Označíme-li

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \big\{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{N+1};\ F(\boldsymbol{x}, y) = 0\big\},\\
\Omega &= U(\boldsymbol{a}, \delta) \times U(b, \Delta),
\end{aligned}$$

říká nám věta, že

$$\Gamma \cap \Omega$$

je totožná s grafem jisté funkce $Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a je tedy (v okolí daného bodu) N-dimenzionální hladkou plochou.

Věta 14.13 [O implicitní funkci – obecná verze] Nechť $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$; podrobněji, jde o funkce

$$F_j(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M), \qquad j = 1, \ldots M.$$

Nechť $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^{N+M}$, po složkách

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_M).$$

Nechť platí:

- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$
- F_j jsou C^1 na okolí $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
- (klíčový předpoklad) matice

  $$\left\{ \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \right\}_{i,j=1,\ldots M}$$

  je regulární v bodě $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Potom existují δ, $\Delta > 0$ a C^1 funkce

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}) : U(\boldsymbol{a}, \delta) \to U(\boldsymbol{b}, \Delta)$$

(tedy funkce z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^M$) tak, že pro každé $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \times U(\boldsymbol{b}, \Delta)$ platí

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \quad \iff \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}).$$

Navíc, je-li $\boldsymbol{F}$ třídy C^k, je též $\boldsymbol{Y}$ třídy C^k (na příslušných okolích).

Poznámka. Věta opět říká, že množina

$$\Gamma = \big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{N+M};\ F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \big\}$$

je N-dimenzionální plocha, neboť je grafem funkce $\boldsymbol{Y} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (na jistém okolí bodu $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
Názorně: v původně $N + M$-dimenzionálním prostoru nám M nezávislých podmínek (rovnice $F_j = 0$) určuje N-dimenzionální objekt. Nezávislost těchto rovnic je zaručena třetím, klíčovým předpokladem.

Věta 14.14 [O inverzní funkci] Nechť $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, podrobněji jde o funkce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= (F_1, \ldots, F_N), \\ F_j &= F_j(x_1, \ldots, x_N). \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $\boldsymbol{F}$ jsou C^1 na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, a že (klíčový předpoklad) matice

$$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \left\{ \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right\}_{i,j=1,\ldots N}$$

je regulární.
Potom existuje U okolí bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že $\boldsymbol{F}|_U$ je prostá. Označíme-li $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$, $V = \boldsymbol{F}(U)$, $\boldsymbol{G} = \big(\boldsymbol{F}|_U\big)_{-1}$, je V otevřená množina, obsahující bod $\boldsymbol{b}$, a funkce $\boldsymbol{G}$ – podrobněji, jde o funkce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= (G_1, \dots, G_N), \\ G_j &= G_j(y_1, \dots, y_N), \end{aligned}$$

– jsou C^1. Navíc platí

$$\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}) = \Big(\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}))\Big)^{-1}$$

Dodatek: je-li $\boldsymbol{F}$ třídy C^k, je též $\boldsymbol{G}$ třídy C^k.