6. Hlubší vlastnosti derivace a spojitosti.

Hloubka se musí skrýt. Kde? Na povrchu.
(Hofmannstahl)

Úmluva. V celé kapitole jsou I a J intervaly (libovolného typu.)

Lemma 6.1. (Plížívé lemma.) Nechť $M \subset [a, b]$ má následující tři vlastnosti:
(i) $a \in M$
(ii) je-li $x_0 \in M$ a $x_0 < b$, pak $\exists x_1 \in M$ takové, že $x_1 > x_0$
(iii) má-li $y \in (a, b]$ tu vlastnost, že pro $\forall \delta > 0$ obsahuje $U_-(y, \delta)$ bod z M, pak nutně $y \in M$.
Tvrdíme, že (i), (ii), (iii) implikuje $b \in M$.

Poznámka. Předpoklady (i), (ii) samy k závěru nestačí: polož $[a, b] = [0, 1]$, $M = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots\}$. (Ovšem 1 má zjevně vlastnost, popsanou v bodě (iii).)

Lemma 6.2. Nechť $f(x)$ je spojitá (resp. spojitá zprava, zleva) v bodě x_0. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $U(x_0)$ (resp. $U_+(x_0)$, $U_-(x_0)$.)

Věta 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I. Potom $f(x)$ je na I omezená.

Poznámka. Předpoklady nelze oslabit:
- $f(x) = 1/x$ je spojitá na $(0, 1]$, ale není omezená (interval není uzavřený)
- $f(x) = 1/x$ pro $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$ není omezená na $[0, 1]$ (funkce není spojitá v 0 zprava)

Definice. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$.
Řekneme, že $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ maximum (podrobně: globální maximum vzhledem I), jestliže $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
Řekneme, že $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ lokální maximum (vzhledem k I), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
Má tam ostré lokální maximum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) > f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.
Analogicky: $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ minimum (podrobně: globální minimum vzhledem I), jestliže $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
Řekneme, že $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I$ lokální minimum (vzhledem k I), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
Má tam ostré lokální minimum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) < f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.
Souhrnný název pro maximum a minimum: extrém.

Věta 6.2. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Je-li x_0 vnitřní bod I a $f'(x_0)$ existuje a je nenulová, pak v x_0 není (ani lokální, vůči I) extrém.

Důsledek. Je-li v bodě x_0 (lokální) extrém, pak nutně buď (i) x_0 je krajní bod, nebo (ii) $f'(x_0)$ neexistuje, nebo (iii) $f'(x_0) = 0$.

Příklady. ① $f(x) = |x|$ má v 0 globální minimum, avšak $f'(0)$ není nula (tato derivace neexistuje)
② $f(x) = x^3$ pro $x \in I = [-1, 1]$. Maximum je v $x = 1$, minimum v -1, ale v žádném z těchto bodů není $f'(x) = 0$. Naproti tomu $f'(0) = 0$, avšak 0 není (ani lokální) extrém.
Z příkladů je vidět, že ani jedna z implikací

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 &\implies x_0 \text{ je extrém} \\ x_0 \text{ je extrém} &\implies f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

obecně neplatí.

Věta 6.3. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I. Pak existuje $x_0 \in I$, v němž má $f(x)$ maximum. Také existuje $x_1 \in I$, v němž má $f(x)$ minimum.

Poznámka. Předpoklady opět nelze oslabit:
• $f(x) = x$ je na $(0, 1)$ spojitá, ale maxima/minima nikde nenabývá (interval není uzavřený)
• $f(x) = \frac{x \sin x}{x+1}$ - má v $[0, \infty)$ nekonečně mnoho lokálních extrémů, ale žádné globální

Věta 6.4. (Rolleova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$, nechť $f(a) = f(b) = 0$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta 6.5. (Lagrangeova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Příklad. $\sin x < x$ pro $\forall x > 0$.

Věta 6.6. Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x)$ je spojitá na $U(x_0, \delta)$ a $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$. Potom

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) ,$$

pokud limita vpravo existuje. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je spojitá na $U_+(x_0, \delta)$ a $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in P_+(x_0, \delta)$. Potom

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f'(x)\,,$$

pokud limita vpravo existuje.

Příklady. ①

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \arcsin x = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty\,.$$

② $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Pro $x \neq \pm 1$ je $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ a tedy

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = -\infty\,.$$

Lemma 6.3. Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou spojité na $U(x_0, \delta)$ a nechť $F'(x) = f(x)$ na $P(x_0, \delta)$. Pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Definice. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, jestliže platí: pokud γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde a, $b \in I$, pak existuje c mezi a, b takové, že $f(c) = \gamma$.

Poznámka. Věta 2.16. tedy říká: spojitá funkce má Darbouxovu vlastnost.

Věta 6.7. Nechť $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu I a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in I$. Potom $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Poznámky. • Derivace spojité funkce nemusí být obecně spojitá - avšak podle předchozí věty má aspoň Darbouxovu vlastnost.
• Důsledek: funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci

Věta 6.8. (Cauchyho.) Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v $[a, b]$. Nechť pro $\forall x \in (a, b)$ existují vlastní $f'(x)$, $g'(x)$ a navíc $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Věta 6.9. (l'Hospitalovo pravidlo.) Chceme počítat

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Nechť $f'(x)$, $g'(x)$ existují vlastní, navíc $g'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$. Nechť platí buď
(a) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$
nebo
(b) $|g(x)| \to \infty$ pro $x \to x_0$.
Potom
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
pokud limita vpravo existuje.

Příklady. ①
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$
②
$$\lim_{x \to 0+} x^a \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = 0. \qquad (a > 0)$$
③ $\frac{x}{2x+\sin x} \to 1/2$, avšak $\frac{1}{2+\cos x}$ limitu v ∞ nemá. Příklad ukazuje, že ve Věta 6.9 opačná implikace neplatí, neboli $f(x)/g(x)$ limitu může mít, i když $f'(x)/g'(x)$ jí nemá.
④
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x \ln(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\cos x \ln(1+x^2) + \sin x \frac{2x}{x^1+1}} = \dots$$
- příklad, kde v zásadě l'Hospital použít jde, ale je to mnohem pracnější, než přímé použití základních limit $\sin x/x \to 1$, $\ln(1+x^2)/x^2 \to 1$.

Věta 6.10. (Monotonie a znaménko derivace.) Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$ resp. $f'(x) \leq 0$ resp. $f'(x) < 0$) pro $\forall x \in (a, b)$. Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) v I.

Příklad. $f(x) = x^2$. Protože $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$, je $f(x)$ rostoucí v $[0, \infty)$. – Všimněte si, že informace o derivaci stačí uvnitř intervalu, závěr platí až do kraje.

Lemma 6.4. Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in (a, b)$. Potom $f(x)$ je ryze monotónní v I.

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní v I, jestliže pro $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$ platí
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Pokud místo $\leq$ požadujeme $<$ resp. $\geq$ resp. $>$, jde o funkci ryze konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní.

Lemma 6.5. Funkce $f(x)$ je konvexní v I, právě když pro $\forall a < b \in I$ a pro $\forall \lambda \in (0,1)$ platí

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\,.$$

Věta 6.11. (Konvexita a monotonie derivace.) Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) v (a,b). Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ a tato funkce v $(-\infty, 0)$ klesá. Původní funkce je spojitá (dokonce v $\mathbb{R}$), tedy $f(x)$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0]$. Analogicky: je ryze konvexní v $[0, \infty)$. Přesto není konvexní v $\mathbb{R}$.
Snadno si rozmyslím, že $f(x)$ roustoucí v $(a,b]$, $f(x)$ roustoucí v $[b,c)$ implikuje $f(x)$ roustoucí v (a,c) – pro konvexitu tedy podobná úvaha neplatí.

Věta 6.12. (Znaménko $f''(x)$ a konvexita.) Nechť I je interval s krajními body a, b. Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f''(x)$ existuje konečná pro $\forall x \in (a,b)$ a $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) \geq 0$ resp. $f''(x) \leq 0$ resp. $f''(x) < 0$) pro $\forall x \in (a,b)$. Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I.

Definice. Řekneme, že x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, jestliže
(i) existuje $f'(x_0)$
(ii) existuje $\delta > 0$ tak, že na jednom z intervalů $(x_0, x_0+\delta)$, $(x_0-\delta, x_0)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní.

Příklady. ① $f(x) = \sin x$ má v $x = 0$ inflexní bod.
② $f(x) = x^2$ pro $x < 0$, a $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \geq 0$. Potom $f(x)$ je ryze konvexní na $(-\infty, 0]$, ryze konkávní na $[0, \infty)$ - ovšem $x = 0$ není dle naší definice inflexní bod: derivace $f'(0)$ neexistuje.