

## Obyčejné diferenciální rovnice

### Separované proměnné

Nalezněte obecné řešení nebo řešení Cauchyovy úlohy

1.  $y' = \alpha y(P_m - y)$ ,  $y(0) = y_0 \in (0, P_m)$  (regulovaný růst počtu obyvatel)

2.  $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

3.  $y' = \frac{1-x}{y}$

4.  $y' = -\frac{e^x}{2y(1+e^x)}$

5.  $y' = \sqrt{1-y^2}$

6.  $y' = \frac{y \ln y}{\sin x}$

7.  $y' = -\frac{2x\sqrt{1-y^2}}{y}$

8.  $y' \cotg x + y = 2$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

9.  $y' = -\frac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$

10.  $y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$

11.  $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$ ,  $y(0) = 1$

12. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'(2 - e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$$

procházející bodem  $(0, \frac{\pi}{4})$  splňující

a)  $y(\ln 3) = 0$       b)  $y(\ln 3) = \frac{\pi}{4}$        $y(\ln 3) = \frac{\pi}{2}$

13. Kterými body prochází právě jedno maximální řešení rovnice  $xy' - y = 0$ ?
14. Meteoroid, který se nachází výhradně pod vlivem zemské přitažlivosti, začíná padat k Zemi z klidové polohy ve vzdálenosti  $h$ . Nalezněte závislost rychlosti meteoroidu na vzdálenosti od povrchu Země. Jakou rychlostí dopadne na zemský povrch, zanedbáme-li vliv zemské atmosféry? Obě úlohy řešte i pro limitní případ  $h = \infty$ . Poloměr Země je přibližně 6378 km.
15. Najděte křivky, pro které platí, že úsečka, ležící na tečně této křivky s krajními body na souřadných osách, má střed v bodě dotyku. Napište rovnici křivky, která prochází bodem  $(2,3)$ .

## Homogenní rovnice a rovnice, které lze na homogenní převést

Není-li řečeno jinak, nalezněte obecné řešení nebo řešení dané Cauchyovy úlohy

16.  $y'(x + y) + x - y = 0$

17.  $y' = \frac{x + 2y}{x}$

18.  $y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$

19.  $y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}$

20.  $y' = \frac{y + \sqrt{xy}}{x}$

21.  $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$

$$22. y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right), y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$23. y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

$$24. y' = \frac{1}{x + y - 2}$$

$$25. y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$$

$$26. y' = \frac{y + x}{x + 3} - \ln \frac{y + x}{x + 3}$$